


NURBS曲面に基づいた 等張力曲面の形状決定 (極小曲面)


張景耀
名古屋市立大学 大学院芸術工学研究科
Email: zhang@sda.nagoya-cu.ac.jp

柔および剛な立体構造の形態と力学特性WG
2013年3月25日(月) 名古屋市立大学にて

建築での応用




石鹸膜実験



ケーブルネット

オートー・軽量構造研究所

建築での応用

German Pavilion, Expo '67,
Montreal, Canada

等張力曲面の性質

性質

与えられた境界をもつ曲面の面積が最小
すべての点において平均曲率がゼロ
面内張力が一定

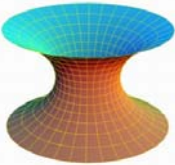
解法

1. 実験的手法
2. 理論的手法
 - ① 変分法
 - ② 複素数解析
3. 数値的手法
 - ① (非)線形解法
 - ② 最適化手法
 - ③ 力学的手法


最初の理論的結果:カテナイド(Catenoid)

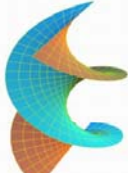
1744年 Euler: 懸垂面(Catenoid)

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{2}(e^{z/a} + e^{-z/a}), \quad (a > 0)$$



懸垂面(Catecooid)





螺旋面(Helicoid)
J.B. Meusnier(1776)

http://www.miguel.com/fractals_math_patterns/visual-math-minimal-surfaces.html

Lagrange問題

Lagrange問題(1762)
与えられた閉曲線を境界にもつ曲面の全体の中で
面積最小のものをみつけた

極小曲面が満たすべき条件

曲面の関数 $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) = 0$$

名古屋立大学
Nagoya City University

極小曲面の方程式とGergonne問題

1776年 Meusnier: 極小曲面の方程式

$$(1 + f_x^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{yy} = 0$$

➡ 平均曲率がゼロ

Gergonne問題(1816)

1. 二つの同じ半径の円柱の交わりで張られる極小曲面
2. 空間の四辺形で張られる極小曲面
3. 与えられた二つの円を通る極小曲面

7

名古屋立大学
Nagoya City University

Weierstrass-Enneperの定式

Lagrangeの条件式を積分することにより、極小曲面を複素解析関数を用いて表す公式を得た(19世紀)

Weierstrass-Enneper Formulation
Independently derived by Enneper(1864) and Weierstrass(1866)

$$(x, y, z) = \text{Re} \left(\int_{w_0}^w (1-w^2)f(w)dw, \int_{w_0}^w i(1+w^2)f(w)dw, \int_{w_0}^w 2wf(w)dw \right)$$

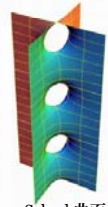
- $f(w) = 1$: Enneper's minimal surface
- $f(w) = k/(2w^2)$ (k is real): Catenoid
- $f(w) = ik(2w^2)$ (k is real): Helicoid
- $f(w) = 2/(1-w^4)$: Scherk's minimal surface
- $f(w) = (1-14w^4+w^8)^{-1/2}$: Minimal surface constrained by space square by Schwarz and Riemann

新しい極小曲面を得るには有効でない
Lagrangeの問題を解決するには有効でない
境界は直線、円、多角形だけ


8

名古屋立大学
Nagoya City University

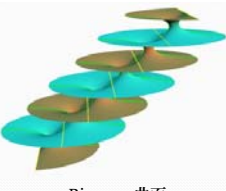
複素数解析による結果



Scherk曲面
(1832, 1835)



Enneper曲面
(1864)



Riemann曲面
(1867)

http://www.miguel.com/fractals_math_patterns/visual-math-minimal-surfaces.html

9

名古屋立大学
Nagoya City University

Plateau問題

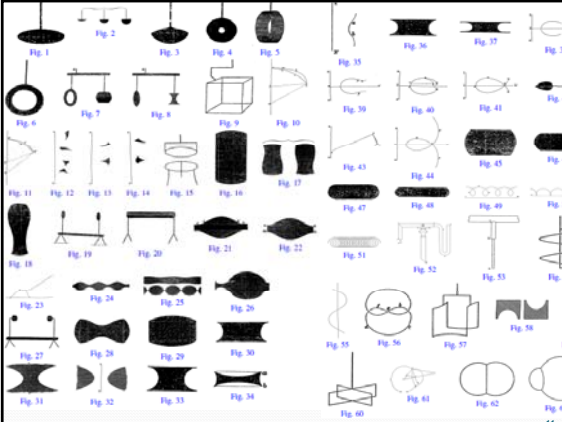
Plateau問題(19世紀後半から)
Plateauは、石鹼膜の実験を行うことにより極小曲面の性質を調べていたため、与えられた閉曲線を境界とするコンパクト(有界閉集合)な極小曲面を調べるという問題

Statique Expérimentale et Théorique des Liquides soumis aux Seules Forces Moléculaires (1873)
Experimental and Theoretical Statics of Liquids subject to Molecular Forces Only

Ken Brakke's home page:
<http://www.susqu.edu/brakke/plateaobook/plateaobook.html>

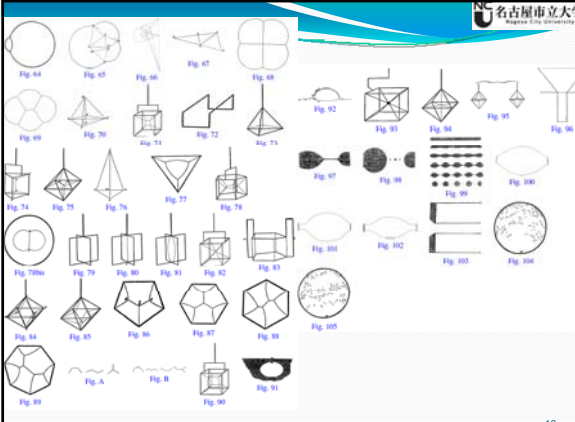


10



11

名古屋立大学
Nagoya City University



12

極小曲面の例

Enneper曲面の家族

Costa曲面(1982)

http://www.miguel.com/fractals_math_patterns/visual-math-minimal-surfaces.html

Plateau問題の課題

解の存在性 (1930年DouglasとRadoより証明)
第1回Fields賞

解の一意性 (いまでも完全に解決されず)

1. 平面閉曲線に十分近い単純閉曲線は、コンパクト極小曲面をただ一つしか張らない。
2. 閉曲線が平面内の凸閉曲線に1対1に直行射影(または中心射影)されるならば、この閉曲線で張られるコンパクト極小曲面はただ一つしかない (Todo, 1933)
3. 閉曲線の全曲率が4Piよりも小さいならば、この閉曲線で張られる円板型極小曲面はただ一つしかない (Nitsche, 1973)

解の安定性 (法線方向の変化があまり大きくなければ安定)

建築分野における解法

八木・大森・石原(1997)
極小曲面法による膜構造の形状決定に関する研究
- 非線形解法の検討と収束性に関する考察

有限要素法
逐次二次計画法
Newton-Raphson

川口・柯・三木(2008)
付帯条件付き極小曲面と一般化最急降下法に関する研究

図2 最終形状立面 1-1 図11 最終形状断面 2-1 図15 最終形状断面 2-2

最適化手法(離散化)

目的関数: 面積最小
制約条件: 境界固定

初期形状 最終形状

最適化手法(離散化)

目的関数: 面積最小
制約条件: 境界固定

初期形状 最終形状

Plateau-Bézier問題

Plateau-Bézier問題(2002?)
与えられた閉曲線を境界とするすべてのBezier曲面のうち、面積が最小となる曲面を決定する問題

Bézier曲面の定義(1950年代後半)

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) k_{i,j}$$

コントロール点

Bernstein多項式

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Plateau-Bézier問題

Monterde(2004)
Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach

線形関係より未知のコントロール点を決定

Comparison between the areas of the surfaces shown in Fig. 4 obtained by different methods

Mask	Top left	Top right	Bottom left	Bottom right
$\alpha = 0$	101.356 (99.91%)	109.316 (101.13%)	77.3515 (100.91%)	71.3129 (102.56%)
$\alpha = \frac{1}{4}$	101.432 (99.98%)	108.849 (100.70%)	76.9206 (100.35%)	69.6413 (100.16%)
$\alpha = \frac{1}{2}$	101.457 (100.01%)	108.762 (100.62%)	76.8465 (100.25%)	69.4261 (99.85%)
Dirichlet extremal	101.449 (100.00%)	108.094 (100.00%)	76.6552 (100.00%)	69.5302 (100.00%)

Plateau問題の上界

Parametric曲面 $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$A = \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv \leq \int_D \sqrt{EG} dudv \leq \int_D \frac{E+G}{2} dudv = D$$

Dirichlet関数

等号となる条件
 $E = G, F = 0 \rightarrow$ 等温座標表示

極小曲面の相当部分は等温座標で表示できる

曲面の第一基本形式と面積

Parametric曲面 $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

第一基本形式 (曲面に関する一次微分の情報)

$$E(u, v) = \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) = \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \right\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F(u, v) = \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$G(u, v) = \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) = \left\| \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

面積

$$A = \int_D \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

曲面の第二基本形式と曲率

Parametric曲面 $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

第二基本形式 (曲面に関する二次微分の情報)

$$L(u, v) = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = -\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}(u, v)$$

$$M(u, v) = \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = -\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} = -\frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}$$

$$N(u, v) = \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = -\frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}$$

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

平均曲率 $H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$

Gauss曲率 $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$

Plateau-Bézier問題

Bézier曲線(面)の問題点

Bézier曲線(面)で表現できない形状がある

円や双曲線などの2次曲線は、重みを付けた有理Bézier曲線

次数、コントロール点の数を変更できない

B-Spline, NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)

形状を変更せず、次数を増やす

形状を変更せず、ノット(コントロール点)を増やす

2次曲線を厳密に表現(NURBS)

T-Splineへの拡張が可能

Bézierを含む

NURBS

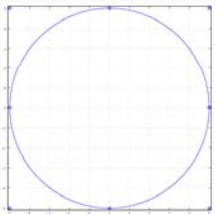
NURBS曲面の式

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{B}_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}$$

$$N_{i,p}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

$\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5\}$

NURBSの例:円



コントロール点

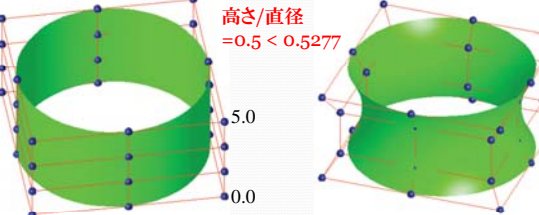
$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \\ 0 & 5 \\ -5 & 5 \\ -5 & 0 \\ -5 & -5 \\ 0 & -5 \\ 5 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ノット $t = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$

重み $W = [1.0000 \ \sqrt{2}/2 \ 1.0000 \ \sqrt{2}/2 \ 1.0000 \ \sqrt{2}/2 \ 1.0000 \ \sqrt{2}/2 \ 1.0000 \ \sqrt{2}/2 \ 1.0000]$

25

NURBSによる安定なCatenoid



高さ/直径 = $0.5 < 0.5277$

変数: 各層の半径とz座標 (4個) $z_2^0 = 5.0/3, z_3^0 = 10.0/3, r_2^0 = r_3^0 = 5.0$

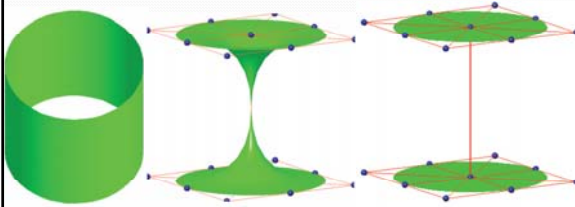
最適化結果 (SQP): $z_2 = 1.2266, z_3 = 3.7734, r_2 = r_3 = 4.2321$

面積	初期	最適解	厳密解	誤差(%)
	157.0796	149.6994	149.7949	0.0638

26

NURBSによる不安定なCatenoid

高さ/直径 = $1.0 > 0.5277$



(a) Initial configuration (b) Final configuration (four layers) (c) Final configuration (six layers)

27

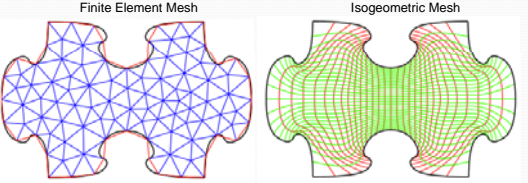
Isogeometric Analysis

従来の有限要素解析の問題点

- CADの滑らかな形状を完全に表現することが出来ない
- 内部節点は微分可能だが境界節点では微分不可
- CADからCAEへの変換またはその後逆変換する際に正確に変換されない

Isogeometric Analysis の利点


- CADの形状表現である曲線(曲面)を用い、CAD形状を保持したまま解析可能
- 要素分割はないため、どこでも微分可能
- 特に曲面構造物の解析精度が改善
- CAD-CAE間のデータ変換が正確かつ迅速



Finite Element Mesh Isogeometric Mesh

<http://www.saga-network.eu/jphcdownload/userupload/15454208/Saga2010-JGravesen.pdf>

Catenary曲線



$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{where} \quad a = \frac{T_0}{\mu}$$

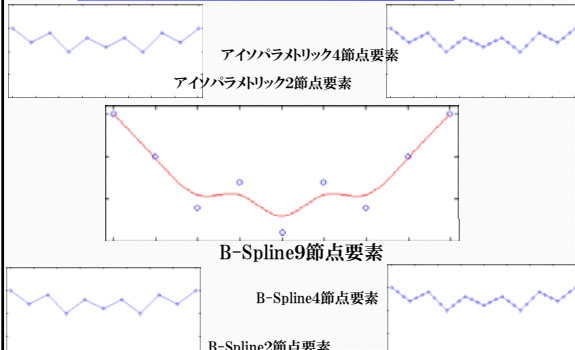
T_0 : ケーブルの張力
 μ : 単位長さの自重

解析は以下に示す5種類の要素を用いて行う

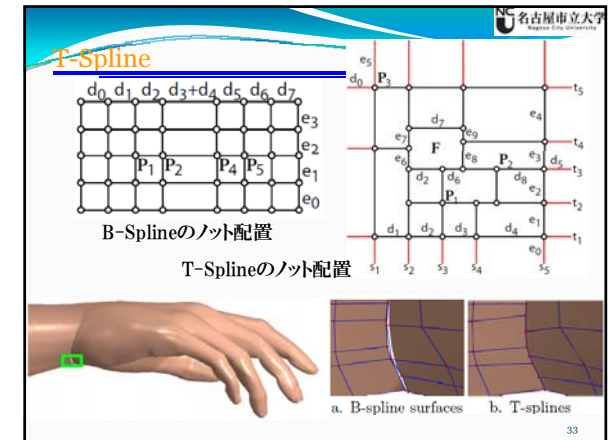
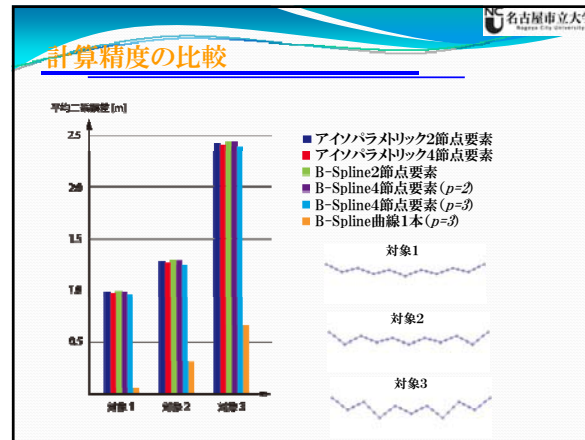
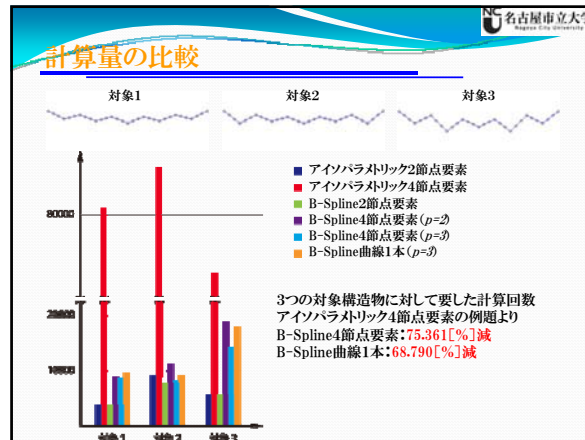
1. アイソパラメトリック2節点要素 (要素数:12)
2. アイソパラメトリック4節点要素 (要素数:12)
3. B-Spline曲線を形状関数とした2節点要素 (要素数:12)
4. B-Spline曲線を形状関数とした4節点要素 (要素数:12)
5. B-Spline曲線1本による形状表現 (要素数:1)

29

要素



アイソパラメトリック4節点要素
 アイソパラメトリック2節点要素
 B-Spline9節点要素
 B-Spline4節点要素
 B-Spline2節点要素



- ### 課題
- 膜の形状決定(力学的手法、Isometric Analysis)
 - 等張力(極小曲面)の決定
 - NURBSを形状関数
 - 膜の裁断図問題
 - 可展な極小曲面は平面のみ
 - 膜のしわ解析
 - T-Splineにより局所的細分割

参考文献

Sederbergら: T-splines and T-NURCCs
 八木ら: 極小曲面法による膜構造の形状決定に関する研究
 - 非線形解法の検討と収束性に関する考察
 川口ら: 付帯条件付き極小曲面と一般化最急降下法に関する研究
 Plateau: Statique Expérimentale et Théorique des Liquides soumis aux Seules Forces Moléculaires
 Monterde: Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach
 小磯: 曲面の変分問題- 極小曲面論入門