切頂二十面体テンセグリティの自己釣合と安定性条件

Self-equilibrium and super-stability of regular truncated icosahedral tensegrity stuructures

建築学専攻　大崎・張研究室　小木曽浩介

1. 研究背景・目的

テンセグリティは，引張材と圧縮材によって構成され，プレストレスを導入することではじめて安定化する構造である[1]．圧縮材は互いに連結せず，引張材の中に圧縮材が浮いたような形状をとる．

芸術分野で生まれたテンセグリティであるが，今日では, 建築構造や生態工学, 機械工学など幅広い分野で研究・応用がなされている[2]．しかし，テンセグリティの基礎に関する研究，特に安定性に関する既往研究は少ない. 本研究の大きな目的は, 切頂二十面体テンセグリティの安定性条件を解析的に（数式表現で）導出することである.

切頂二十面体テンセグリティは，切頂多面体テンセグリティの1種であり，対称性を有している．切頂多面体テンセグリティの安定性に関して，Tsuuraら[3]は，切頂四・六・八面体テンセグリティの自己釣合と安定性を数値解析的に示した. しかし, 安定性の深い理解のためには, 解析的に安定条件を導出する必要がある. そこで, L.Y.Zhangら[4]は，切頂四・六・八・十二・二十面体を含む切頂多面体テンセグリティの自己釣合状態を解析的に導出したが，安定性に関しては数値解析的に導出している.

テンセグリティの安定性に関しては，一般的な条件式が示されており，軸力密度行列の固有値を求める必要がある[2,5]. しかし, 軸力密度行列の次元はテンセグリティの節点数に等しく高次元であり, 解析的に（数式表現で）固有値を導出するのは困難である. これに対する解決策として，群の既約表現を用いた軸力密度行列のブロック対角化が知られている[3]．これは，構造物の対称性を利用し，軸力密度行列をブロック対角化することで固有値計算の次元を落とす方法である. J.Y.Zhangら[6,7,8]は, 多面体群を有するテンセグリティに関して，ブロック対角化された軸力密度行列を解析的に導き, 切頂四面体・六面体・八面体テンセグリティの安定性条件を解析的に導いた.

本研究では，条件式が導かれていない切頂二十面体テンセグリティに関して，ブロック対角化理論を適用し，自己釣合と安定性に関する条件式を解析的に導くことを目的とする．また，上記のいずれの研究も，切頂二十面体テンセグリティの位相を一種に限定した解析を行っているが，実際はいくつかの位相が考えられるため，本研究では全位相を含めて研究を行った.

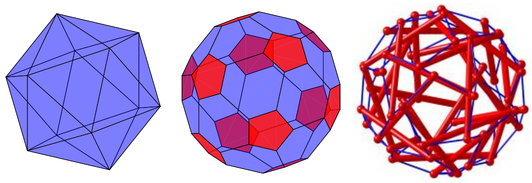
本研究の流れの大筋は，以下の通りである.

1. 可能な位相（部材の接続関係）の把握
2. 対称性を利用した自己釣合の導出
3. 安定条件の導出

まず1で，切頂二十面体テンセグリティの可能な位相を把握する．これには二十面体群を用いて可能な位相が8種類であることを示した. 次に, 切頂二十面体テンセグリティの各位相に対して，対称性を利用した自己釣合方程式を導出し，各軸力の関係式を得た．最後に，自己釣合状態のもと，群の既約表現によるブロック対角化により，安定条件の解析的導出を行った.

2. 切頂二十面体テンセグリティの構造特性

切頂二十面体テンセグリティは，図2.1に示すように正二十面体(a)の頂点を切り取った切頂二十面体(b)の各辺に引張材(cable)を，内部の対角線上に圧縮材(strut)を配置して得られる．引張材は正二十面体の辺上(edge cable)と切頂面の五角形の辺(cutting cable)に分類される. これら3種の部材は，その対称性よりそれぞれ同一の長さと初期力を持つ．edge cable, cutting cable, strutの軸力密度をそれぞれ，q_e, q_c, q_s とする.



(a)正二十面体 (b)切頂二十面体 (c)切頂二十面体テンセグリティ

図1　切頂二十面体テンセグリティの生成方法

切頂二十面体テンセグリティは, 60個の節点, 30本の圧縮材と90本の引張材で構成される．修正版マクスウェルの法則により，部材数や節点数に関する以下の関係式が得られる.

$$
\begin{aligned}
n^s - n^m &= m - dn + 6 \\
&= 120 - 3 \times 60 + 6 = -54
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ここで，n^s, n^m, n, m, d はそれぞれ，不静定次数(プレストレスモードの独立な数)，微小メカニズムの数，節点数，部材数，空間の次元数を表す．また，$n^s = 1$ であるため，$n^m = 55$ となる．すなわち，切頂二十面体テンセグリティは55個の微小メカニズムがそんざいする. 微小メカニズムを持つ構造はプレストレスを適切に導入することで安定化する[5].

3. 位相（接続関係）

構造物の対称性は, 群論を用いて評価できる. 切頂二十面体に対称操作を行い，それ自身に重なるような操

作は単位元を含めて60個あり，この操作を元として形成される群を二十面体群と呼ぶ．60個の対称操作は3種類に分類される．正二十面体の外接球の中心をO とする．

- 180 度回転操作C_2 ：O と正二十面体の辺の中心を結んだ線を軸とした 15 個の回転操作
- 120 度回転操作C_3 ：O と正二十面体の面の中心を結んだ線を軸とした 20 個の回転操作
- 72 度回転操作C_5 :O と正二十面体の頂点を結んだ線を軸とした 24 個の回転操作

切頂二十面体テンセグリティの位相は，圧縮材の配置の仕方によって変わり，いくつかの種類が考えられる．ある一点に着目した時，それらに接する部材は，図2で示すように，橙色(cutting cable)2本，白色(edge cable)1本，緑色(strut)1本の計4本存在する．この内，引張材の3本の配置は辺上で固定されるため，残りの圧縮材(strut)の配置の仕方で位相が決まる．

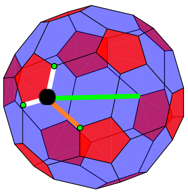
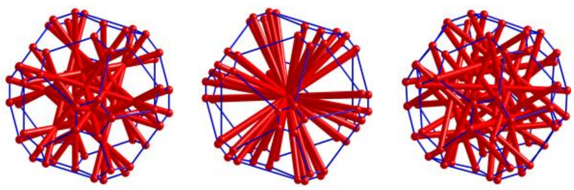


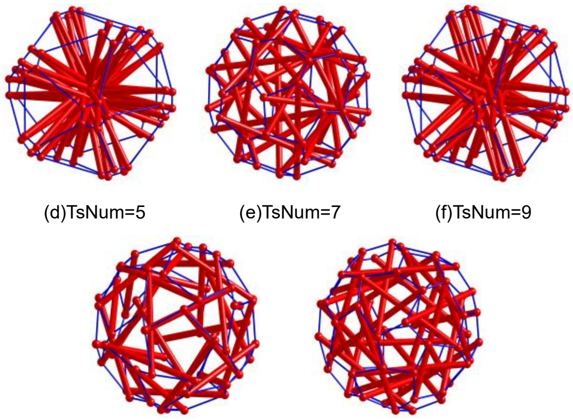
図2　ある節点(黒)に接続する引張材(白，橙)と圧縮材(緑)

圧縮材の配置は無条件に決められるわけではなく，テンセグリティの定義から，圧縮材は互いに連結してはならない．また，対称性を失わないような配置にする必要がある．

ある節点i に注目し，その空間上の位置をL_i とし，i に対称操作を行い移動した先の空間上の位置をL_j とする．今，L_i とL_j を結ぶように圧縮材を配置し，これらの操作を連続で行うことを考える．このとき，圧縮材が連結しないようにするためには，対称操作としてC_2を選ばなければならない．したがって，圧縮材が切頂二十面体の表面上に配置されるものを除けば，14種類(C_2 の位数-1)の位相が考えられる．また，重複するものを除くことで8種類の位相が確かめられた．図3にこの8種類の位相を示す．ここで，TsNumは各位相に適当につけられた番号である．既往の研究では，TsNum=11の位相の切頂二十面体テンセグリティが対象とされている．



(a)TsNum=1　(b)TsNum=2　(c)TsNum=3



(d)TsNum=5　(e)TsNum=7　(f)TsNum=9

(g)TsNum=11　(h)TsNum=13

図3　切頂二十面体テンセグリティの全位相

4. 切頂二十面体テンセグリティの自己釣合

テンセグリティの代表節点$\mathbf{x0}$ と部材kで接続する節点$\mathbf{x}_j$ への変換行列を$\mathbf{T}_j$ とする．このとき，対称性のあるテンセグリティの自己釣合方程式は以下で表される[3].

$$\hat{\mathbf{E}}\mathbf{x0} = \mathbf{0} \tag{3}$$

$$\hat{\mathbf{E}} = q_k\left(\mathbf{T}_j - \mathbf{I}\right) \tag{4}$$

ここで，q_k は部材k の軸力密度，$\mathbf{I}$ は単位行列を表す．また，$\hat{\mathbf{E}}$ は軸力密度行列と呼ばれる．切頂二十面体テンセグリティに上記を適用することで，(4)式は，

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}} = q_c(\mathbf{I} - \mathbf{T}_{c1}) + q_c(\mathbf{I} - \mathbf{T}_{c2}) + q_e(\mathbf{I} - \mathbf{T}_e)\\ +q_s(\mathbf{I} - \mathbf{T}_s\{\mathrm{TsNum}\})\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$\mathbf{T}_s\{\mathrm{TsNum}\}$は位相TsNumの圧縮材の変換行列を表す．また，(3)式の$\mathbf{x0}$ に非自明な解が存在するためには，以下が成り立つ必要がある．

$$\left|\hat{\mathbf{E}}\right| = 0 \tag{6}$$

以降は，TsNum=11の位相のみを対象として解析を行う．(5),(6)式より切頂二十面体テンセグリティの自己釣合方程式及びq_e, q_c, q_s の関係式が以下で得られる．

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} q_c + 2q_e + \frac{5+\sqrt{5}}{4}q_s & -\frac{1}{2}q_s - \frac{2}{1+\sqrt{5}}q_c & -\frac{1}{1+\sqrt{5}}q_s \\ -\frac{1}{2}q_s - \frac{2}{1+\sqrt{5}}q_c & \frac{5-\sqrt{5}}{4}q_s + \frac{3-\sqrt{5}}{2}q_c & -\frac{1+\sqrt{5}}{4}q_s \\ -\frac{1}{1+\sqrt{5}}q_s & -\frac{1+\sqrt{5}}{4}q_s & 2q_e + \frac{5-\sqrt{5}}{2}q_c + \frac{3}{2}q_s \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$A = q_s + q_e, \qquad B = q_s q_e \tag{8}$$

$$2\sqrt{5}q_c^2 + \left(1+\sqrt{5}\right)(A^2+B)q_s + \left(5+3\sqrt{5}\right) = 0 \tag{9}$$

$$q_{c1} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}A}\left(A^2 + B + \sqrt{A^4 + B^2 - 3A^2B}\right) \tag{10}$$

$$q_{c2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}A}\left(A^2 + B - \sqrt{A^4 + B^2 - 3A^2B}\right) \tag{11}$$

(10),(11)式の両辺をq_e で割ることにより，自己釣合方程式は，$\frac{q_c}{q_e}, \frac{q_s}{q_e}$ の2種類の比の変数で表される．したがって，一般性を失うことなく$q_e = 1$ とすれば，1つの変数q_s の値によって形状（自己釣合状態）が決定される．様々な

q_s の値に対応する形状を図4に示す．また，圧縮材には圧縮力(負)，引張材には引張力(正)が働く．すなわち，以下の条件（自己釣合条件）

$$q_c > 0, \qquad q_s < 0 \tag{12}$$

が成り立つ必要がある．(10),(11)式から切頂二十面体テンセグリティの自己釣合条件は以下で表される．

$$\begin{cases} \dfrac{q_s}{q_e} < -1 & q_c = q_{c1}\text{のとき} \\ -1 < \dfrac{q_s}{q_e} < 0 & q_c = q_{c2}\text{のとき} \end{cases} \tag{13}$$

また，q_s に対するq_c の値を表したグラフを図5に示す．図に示すように(13)式の範囲において自己釣合条件を満たすことがわかる．

5. 切頂二十面体テンセグリティの安定条件

プレストレスの大きさに関係なく安定な構造である構造をsuper-stabilityな構造という．以降は，このような構造を安定と呼ぶ．Super-stabilityである十分条件は以下の3つを満たすことと同値である[2]．

1. 軸力密度行列$\mathbf{E}$ のランク落ちが$d+1$ である
2. 軸力密度行列$\mathbf{E}$ は半正定値行列である
3. 幾何行列$\mathbf{G}$ のランクが$(d^2+d)/2$ である

3つ目の条件は一般的な構造であれば条件を満たすため[5]，条件1,2のみ扱う．

条件1,2どちらも軸力密度行列の固有値を求める必要があるが，切頂二十面体テンセグリティの軸力密度行列の次元は(60×60)であり，解析的に固有値を求めるのは困難である. そこで, 既約表現による軸力密度行列のブロック対角化により固有値計算の次元を落とす. 切頂二十面体テンセグリティの場合，軸力密度行列$\mathbf{E}\in\mathbb{R}^{60\times 60}$ は二十面体群の既約表現を用いて以下のようにブロック対角化できる[3].

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\mathrm{A1}} \oplus 3\mathbf{E}^{\mathrm{T1}} \oplus 3\mathbf{E}^{\mathrm{T2}} \oplus 4\mathbf{E}^{\mathrm{G}} \oplus 5\mathbf{E}^{\mathrm{H}} \tag{13}$$

$$\mathbf{E}^{\mu} = q\boldsymbol{I} - q_c\mathbf{R}^{\mu}(g_1) - q_c\mathbf{R}^{\mu}(g_2) - q_e\mathbf{R}^{\mu}(g_3) - q_s\mathbf{R}^{\mu}(g_4) \tag{14}$$

$$q = 2q_c + q_e + q_s \tag{15}$$

ここで，$\mathrm{A1, T1, T2, G, H}$ はぞれぞれ，1次，3次，3次，4次，5次の既約表現，μ は$\mathrm{A1, T1, T2, G, H}$のいずれかを表す．$g_i(i=1,2,3,4)$はそれぞれ二十面体群の元であり，代表節点に対しに作用して，edge cable, cutting cable, strutのいずれかに接続される点に移動する．$\mathbf{R}^{\mu}(g_i)$ は元g_i に対するμ の既約表現である．また，T1 は二十面体群の自然表現であり，既約密度行列$\hat{\mathbf{E}}$と$\mathbf{E}^{\mathrm{T1}}$ブロックの固有値は等しい．本研究では，[9,10]を参考に必要となる二十面体群の既約表現を導出し, (14)式から各ブロックを導出した．

上記のブロック対角化とSuper-stabilityの条件を合わせることで，切頂二十面体テンセグリティの安定条件は次のように書き替えられる. すなわち, 以下の二つが満足することである．

1. $\hat{\mathbf{E}}(=\mathbf{E}^{\mathrm{T1}})$ の固有値は，1つが0，他2 つは正である
2. $\mathbf{E}^{\mu}$ $(\mu = \mathrm{T2, G, H})$ の固有値はすべて正である

本研究では，TsNum=11の位相に対して，自己釣合状態のもと，上記の条件を満たすq_s の範囲を解析的に導出した．以下には，その導出仮定の概略を記載する．

- $\hat{\mathbf{E}}(=\mathbf{E}^{\mathrm{T1}})$ブロックに関して（条件1）

$q_c = q_{c1}$ のとき，シルベスタの定理[11]より，軸力密度行列は負の固有値を持つことが示せるので，安定ではない．

$q_c = q_{c2}$ のとき，$\hat{\mathbf{E}}$ ブロックのゼロ固有値でない残り2つの固有値をλ_1, λ_2 とおくと，これらが正であるためには，$\lambda_1+\lambda_2>0$, かつ $\lambda_1\lambda_2>0$であればよい．

$$\lambda_2+\lambda_3 = \mathrm{trace}(\hat{\mathbf{E}}) = \left(5-\sqrt{5}\right)q_c + 4q_e + 4q_s \tag{14}$$

$$\lambda_2\lambda_3 = \frac{5}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)q_c^2 + 4A^2 + \left(13-3\sqrt{5}\right)Aq_c + \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)B \tag{15}$$

このとき，(11)式の形を見てわかるように，q_c の形はそれほど簡単ではないため，不等式評価することを考える．$D_{\_} = A^2+B-\sqrt{A^4+B^2-3A^2B}$ とおくと，

$$\begin{aligned} D_{\_} &= A^2+B-\sqrt{A^4+B^2-3A^2B} \\ &< A^2+B-\sqrt{A^4+B^2-2A^2B} \quad (\because B = q_s < 0) \\ &= A^2+B-\sqrt{(A^2-B)^2} \\ &= 2B \quad (\because A^2-B>0)) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{\_}}{A} &= A+\frac{B}{A}-\sqrt{A^2+\left(\frac{B}{A}\right)^2-3B} \\ &> A+\frac{B}{A}-\sqrt{\left(A-\frac{3}{2}B\right)^2} \\ &= \frac{5}{2}\frac{B}{A} \end{aligned} \tag{17}$$

(16)式より，

$$\begin{aligned} q_{c2} &= -\frac{1}{\sqrt{5}}g\frac{D_{\_}}{A} \\ &> -\frac{2}{\sqrt{5}}g\frac{B}{A} \\ &> -\frac{B}{A} \quad \left(\because \frac{2}{\sqrt{5}}g>1\right) \end{aligned} \tag{18}$$

(17)式より，

$$\begin{aligned} q_{c2} &= -\frac{1}{\sqrt{5}}g\frac{D_{\_}}{A} \\ &< -\frac{1}{\sqrt{5}}g\frac{5}{2}\frac{B}{A} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{2}g\frac{B}{A} \end{aligned} \tag{19}$$

これらをまとめると，

$$-\frac{B}{A} < -\frac{5+\sqrt{5}}{5}\frac{B}{A} < q_{c2} < -\frac{5+\sqrt{5}}{4}\frac{B}{A} \quad (-1<q_s<0) \tag{20}$$

(20)式を用いることで，自己釣合状態$(-1<q_s<0)$ において，$\lambda_1+\lambda_2>0$, かつ $\lambda_1\lambda_2>0$ であることが示される．

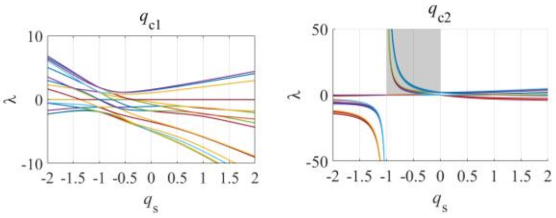
- $\mathbf{E}^{\mu}$ $(\mu = \mathrm{T2, G, H})$ に関して（条件2）

シルベスタの定理[12]を利用することで，自己釣合状態$(-1 < q_s < 0)$において，固有値がすべて正であることが示される．方法としては，(20)式及び$\hat{\mathbf{E}}$の首座小行列式の因数分解，多項式近似と誤差への分解等を利用した．

上記の結果から，TsNum=11の位相において，安定である条件が以下であることが解析的に示された．

$$-1 < \frac{q_s}{q_e} < 0 \quad (q_c = q_{c2}) \tag{21}$$

数値解析によって得られたブロック対角化を行わない状態での$\mathbf{E}$の固有値60個の値を表したグラフを図4に示す．図を見てわかるように(21)式の範囲において固有値が0以上であることが見てとれる．



(a)$q_c = q_{c1}$ (b)$q_c = q_{c2}$

図4 q_s と60の固有値の関係図(TsNum=11)

また，上記で得られた解は一つの位相に関するものであるが，本研究では，位相によらない一般化した安定条件の予想を得た．以下にはその結果のみを記載する．

$$\begin{cases} -\dfrac{(3-\sqrt{5})}{2} < \dfrac{q_s}{q_e} < 0 & \mathrm{TsNum} = 1,3,13 \\ -\dfrac{1}{10}(5-\sqrt{5}) < \dfrac{q_s}{q_e} < 0 & \mathrm{TsNum} = 2,5,9 \\ -1 < \dfrac{q_s}{q_e} < 0 & \mathrm{TsNum} = 7,11 \end{cases} \tag{22}$$

上記より，8種類の位相に対して安定条件は3種類であることがわかる．図5には，8種類の位相を安定条件によって区分した図を示す．左上の添え字はTsNumを表す．

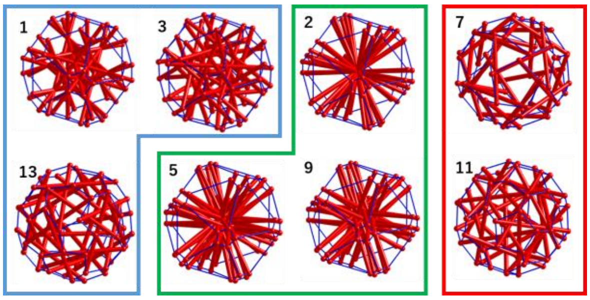


図5 安定条件による位相のグループ分け

6. 結論

本研究では，切頂二十面体テンセグリティの自己釣合と安定条件について，解析的な（数式表現での）導出を試みた．導出方法には，対称性を利用した二十面体群の既約表現を用いた軸力密度行列のブロック対角化を用いた．得られた成果は以下の通りである．

- 二十面体群を利用することで，圧縮材が連結しないかつ対称性を保つ位相（接続関係）が 8 種類であることを示した．
- 一つの位相($\mathrm{TsNum} = 11$)に対して，切頂二十面体テンセグリティが Super-stability である条件は $-1 < q_s/q_e < 0$ $(q_c = q_{c2})$ であることを解析的に（数式表現で）に示した．
- 位相によらない一般化した安定条件の予想を示した．それにより 8 種類の位相に対し，安定条件の種類は 3 種類のみであることが示された．また，自己釣合方程式から 3 種類の軸力密度行列の関係式は 2 種類得られるが，そのうち 1 つは安定条件を満たさず，もう一方は安定条件を満たすことが分かった．ただし，これらは数値解析の結果から得られた予想であって，数式によって厳密に示されたわけではない．

参考文献

[1]. F.R.B.,"Tensile-integrity structures,"U.S.Patentand Trademark Office, Washington, DC, 1962.

[2]. J.Y. Zhang, M. Ohsaki, “Tensegrity structures: form, stability, and symmetry,” Springer, 2015.

[3]. F. Tsuura, J.Y. Zhang, M. Ohsaki, “Self-equilibrium and Stability of Tensegrity Structures with Polyhedral Symmetries,” Proceedings of International Association for Shell and Spatial Structures, Shanghai, China, 2010.

[4]. L.Y. Zhang, Y. Li, Y.P. Cao, X.Q. Feng, H. Gao, “Self-equilibrium and Super-stability of Truncated Regular Polyhedral Tensegrity Structures: A Unified Analytical Solution,” Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engieering Sciences,Vol. 468, 2012.

[5]. J.Y. Zhang, M. Ohsaki, “Stability conditions for tensegrity structures,” Int. J. Solids Struct., 44, 2007.

[6]. J.Y. Zhang, S.D. Guest, M. Ohsaki, “Symmetric prismatic tensegrity structures: part i. configuration and stability,” Int. J. Solids Struct., 46, 2009.

[7]. J.Y. Zhang, M. Ohsaki, “Self-equilibrium and stability of regular truncated tetrahedral tensegrity structures,” J. Mech. Phys. Solids., 60, 2012.

[8]. J.Y. Zhang, M. Ohsaki, F. Tsuura, "Self-equilibrium and super-stability of truncated regular hexahedral and octahedral tensegrity structures," International Journal of Solids and Structures,Volume 161, 2019.

[9]. 北川正一,”20 面体群の構造”教養研究, 16 巻 3 号, 2010

[10]. 平井武,”線形代数と群の表現”, 朝倉書店, 2001

[11]. T.George, Gilbert, "positive definite matrices and Sylvester's criterion, The American Mathematical Monthly, 1991, pp. pp.44-46.