

二面体群対称をもつテンセグリティ構造の安定性に関する研究

Stability Investigation of with Dihedral Symmetry Tensegrity Structures

155703 岡野 正暉

(主指導教員 張 景耀 准教授 副指導教員 青木孝義 教授 影山正幸 准教授)

1. はじめに

テンセグリティ構造とは、プレストレストピン接合構造の一つであり、ストラットとケーブルの二種類の部材により構成される。それらの部材はそれぞれ圧縮力と引張力のみをもち、外力なしに自己釣り合い形状が保たれる。テンセグリティ構造はスネルソンの彫刻として用いられて以来、数学者やエンジニアを中心として多くの研究がなされ、発展をとげてきた。テンセグリティ構造のその柔軟性から、近年では機械工学や医学、宇宙工学などの多くの分野で応用され、建築分野においても、東京大学生産技術研究所・千葉実験場などの応用例が存在する(図 1)。

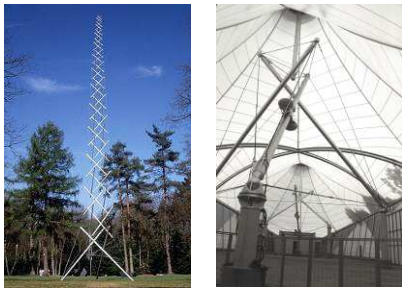


図 1 テンセグリティ構造の応用例：Needle Tower¹⁾(左)と、東京大学生産技術研究所・千葉実験場²⁾(右)。

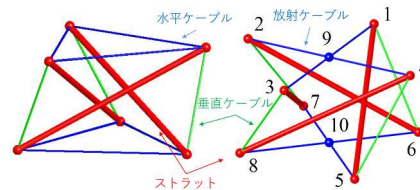
本研究の主題は、テンセグリティ構造の安定性についてである。一般的な構造物において、その安定性はひずみエネルギーの極小値性により判定される。テンセグリティ構造には通常の安定性の他にも安定性基準が存在することや、特殊な振る舞いをする構造物が存在することが知られている^{3),4)}。その中でも、本研究では、「super-stability」と「多重安定性」に焦点を当てている。

A) Super-stability: Super-stability とは軸力レベルや材料特性に関わらず常に安定であることを意味する強力な安定性基準であり、軸力密度行列の半正定値性により判定され

る³⁾。特に、図 2(a)に示す二面体群対称をもつ角柱型テンセグリティ構造の安定性について、Connelly and Terrell⁵⁾は、水平ケーブルが隣接節点に接続される場合にその構造が super-stable になることを示し、さらに Zhang and Ohsaki⁶⁾では、群の表現理論を導入することでも同様の結果が導かれることが確認された。しかしながら、これらの結果は、特定のブロックが対象であり、その証明は不十分であった。したがって、本研究においては、より一般的な条件を導くことにより、既存の証明を完成されることを目的とする。

B) 多重安定性: 多重安定な構造物とは、super-stable ではない構造物のひずみエネルギーがいくつかの極小値をもち、それらに応じた複数の安定形状を有する構造物である。既往研究では、Defossez⁷⁾により複数の安定形状をもつテンセグリティ構造が発見され、他にも、Xu and Luo⁷⁾や Micheletti⁸⁾、Zhang and Ohsaki⁶⁾により、様々な多重安定なテンセグリティ構造が発見された。

このように、テンセグリティ構造の多重安定性についていくつかの研究がされてきた。しかし、これまでの研究では特定の条件下において多重安定であることが示されてはいるが、他の条件ではどうか、などといった部分で疑問がある。したがって、Zhang and Ohsaki⁶⁾が多重安定であることを示した図 2(b)にある星形テンセグリティ構造に対し、パラメータを変化させることで構造物の多重安定挙動にどのような影響があるか、ということに関する考察を行う。



(a) 角柱型テンセグリティ (b) 星形テンセグリティ

図 2 角柱型テンセグリティと星形テンセグリティ

2. 二面体群対称と自己釣合い

本節で、本研究に関わる基本的な事項の説明を行う。

2.1. 二面体群対称

研究対象としている構造物は二面体群対称を有している。二面体群とは、正多角柱の対称性を表す群であり、 N 角柱に対して以下の三種類の対称操作がある(図3)。

- (a) 恒等変換
- (b) z 軸を中心に $2i\pi / N$ ($i=1,2,\dots,N-1$) 回転させる N -fold 回転
- (c) 多角形と垂直な辺の中心と原点を結ぶ軸を中心に半回転させる N 個 2-fold 回転

これらの対称操作により構造物は不変である。

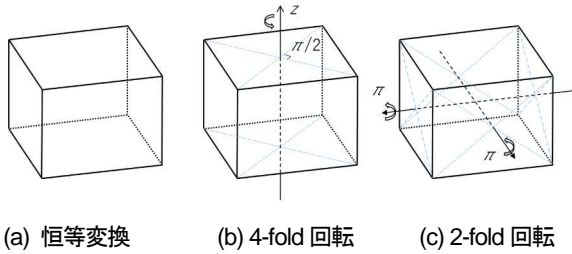


図3 四角柱の三種類の対称操作

2.2. 自己釣合い方程式

3次元空間上に存在する、 n 個の節点と m 個の部材をもつテンセグリティ構造を考える。軸力密度とは部材長さに対する軸力の比であり、基準点 i ($i=1,2,\dots,n$) がほかの節点 j ($j=1,2,\dots,n; j \neq i$) と接続されているとき、軸力密度 q_{ij} は以下ようになる。

$$q_{ij} = \frac{s_{ij}}{l_{ij}} \quad (1)$$

ここで、 s_{ij} と l_{ij} はそれぞれ節点 i と j をつなぐ部材の軸力と長さである。

構造物が自己釣合い状態にあるとき、各節点に接続される部材の軸力の合計はゼロになる。すなわち、基準点 i に対して以下の釣合い式が成り立つ。

$$\sum_j q_{ij} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{X}_i は節点 i の座標を表す。

さらに、すべての節点の x 軸、 y 軸、 z 軸座標をそれぞれ座標ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} (\in \mathbb{R}^n)$ を用いて表したとき、各軸方向における自己釣合い方程式は軸力密度行列 $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を用いて以下ようになる。

$$\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{y} = \mathbf{E}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (3)$$

2.3. 幾何剛性行列

微小変位 \mathbf{d} と外力 \mathbf{p} の間には接線剛性行列 \mathbf{K} を用いて以下の関係がある。

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (4)$$

この接線剛性行列は以下のように線形剛性行列 \mathbf{K}_E と幾何剛性行列 \mathbf{K}_G に分割できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \\ &= \mathbf{D}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{D}^T + \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{I}_3 は3次元の単位行列、 \mathbf{D} は釣合い行列と呼ばれるもので、 $\bar{\mathbf{K}}$ 部材剛性行列と呼ばれるものである。 \mathbf{K}_E は部材剛性に、 \mathbf{K}_G は部材の軸力と関係する。

2.3. 安定性

全ポテンシャルエネルギー最小の原理から構造物は接線剛性行列が正定値であれば安定となる。つまり、任意の微小変位 \mathbf{d} に対し、

$$\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} > 0 \quad (6)$$

が満たされれば安定である。

Super-stability とは軸力レベルや材料特性に関わらず安定となる、強力な安定性基準である。線形剛性行列は常に半正定値であるので、構造物が super-stable となるためには、任意の微小変位 \mathbf{d} に対して次式を満足すればよい。

$$\mathbf{d}^T \mathbf{K}_G \mathbf{d} \geq 0 \quad (7)$$

以上から、super-stable である構造物はひずみエネルギーが大域的な極小解をもつと考えられる。つまり、super-stable ではないテンセグリティ構造が複数のひずみエネルギーの極小値をもち、多重安定の特性をもつ可能性がある。

3. Super-stability

本節で、角柱型テンセグリティ構造の super-stability に関する研究の結果の説明を行う。

角柱型テンセグリティ構造は、図2(a)に示したように水平ケーブル、垂直ケーブル、ストラットの三種類の部材により構成され、ケーブルが引張力を、ストラットが圧縮力のみを負担する。本論文では、水平ケーブルの接続関係を h 、垂直ケーブルの接続関係を v で表す。

3.1. 一般的な super-stability の十分条件

テンセグリティ構造の super-stability に関して、以下の3つの条件を満たせば、その構造は super-stable であることが分かっている⁶⁾。

- (a) 軸力密度行列が4つのゼロ固有値をもつ。
- (b) 軸力密度行列は半正定値である。
- (c) 幾何行列がフルランクである。

条件(a)は非退化条件であり、条件(c)は構造物が分割できない構造であれば満たされる。そのため、普通は条件(a)と(c)は満たされているので、条件(b)を満たせばその構造は super-stable である。

3.2. 軸力密度行列のブロック対角化

角柱型テンセグリティ構造は、二面体群対称を有しているので、部材の軸力密度は種類ごとで同じ値となる。そのため、水平ケーブル、垂直ケーブル、ストラットの軸力密度をそれぞれ q_h, q_v, q_s と表す。また、その対称性を持ちいて、軸力密度行列を以下のようにブロック対角化できる⁹⁾。

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2N \times 2N} = \tilde{\mathbf{E}}_{kl}^{A_1} \oplus \tilde{\mathbf{E}}_{kl}^{A_2} \oplus \left(\tilde{\mathbf{E}}_{kl}^{B_1} \right) \oplus \left(\tilde{\mathbf{E}}_{kl}^{B_2} \right) \oplus 2\tilde{\mathbf{E}}_{2 \times 2}^{E_1} \oplus \dots \oplus 2\tilde{\mathbf{E}}_{2 \times 2}^{E_p} \quad (8)$$

ここで、 $A_1, A_2, B_1, B_2, E_k (k=1, \dots, p)$ は二面体群の既約表現である。 B_1, B_2 は N が偶数のときにのみ存在し、 p は奇数では $(N-1)/2$ 、偶数では $(N-2)/2$ になる。

十分条件から、 $\tilde{\mathbf{E}}$ がゼロ固有値を4つもたなければならぬ。 $\tilde{\mathbf{E}}^{A_1}$ は常にゼロであるため、その固有値もゼロである。したがって、 $\tilde{\mathbf{E}}^{A_2}$ と二つの $\tilde{\mathbf{E}}^{E_i}$ がゼロ固有値も持てばよい。つまり、

$$\|\tilde{\mathbf{E}}^{A_2}\| = \|\tilde{\mathbf{E}}^{E_i}\| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_v = -q_s \\ q_h / q_v = \sqrt{2-2C_{vk}} / \sqrt{2-2C_{hk}} \end{cases} \quad (9)$$

となる。ここで、例えば $C_{hk} = \cos(2hk\pi / N)$ を意味する。

よって、式(9)を用いると、ブロック $\tilde{\mathbf{E}}^{E_i} (i=1, \dots, p)$ が以下のように求まる。

$$\tilde{\mathbf{E}}^{E_i} = \begin{pmatrix} 2t(1-C_{hk})+1-C_{vk} & -S_{vk} \\ -S_{vk} & 2t(1-C_{hk})-(1-C_{vk}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

3.3. Super-stable となるための条件

式(10)の二つの固有値は以下になる。

$$\lambda_1^{E_i} = 2t(1-C_{hk}) + \sqrt{2(1-C_{vk})} \quad (11)$$

$$\lambda_2^{E_i} = 2t(1-C_{hk}) - \sqrt{2(1-C_{vk})} \quad (12)$$

$\lambda_1^{E_i}$ は常に正であるため、 $\lambda_2^{E_i} \geq 0$ となる条件を考えればよい。

詳細は省略するが、結果として以下の結果が証明された。

- $hk = jN \pm 1$ のとき、構造は super-stable となる。
- $hk = jN \pm 1$ のとき、構造は super-stable とならない。
- $hk = jN \pm 1$ であるとき、構造物は図4のような水平ケーブルが隣接節点につながれた形状となる。したがって、本

研究により、既往研究の証明が完成した。

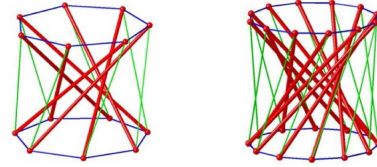


図4 Super-stable である構造の例

4. 多重安定性

本節では、多重安定性に関する結果について説明する。対象とするのは図2(b)に示す、ストラット4本の星形テンセグリティ構造である。この構造は、剛体変位を拘束して強制変位を与えると、部材接触により図5のようなもう一つの安定形状へと移行する。

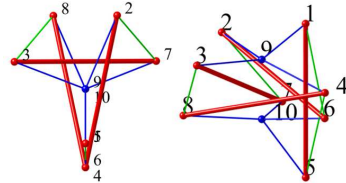


図5 4ストラット星形テンセグリティの異なる安定形状

星形テンセグリティ構造の多重安定挙動を把握するために、以下の三つのパラメータを変化させることでその特徴を捉える。

- (a) 初期軸力密度…幾何剛性の変化による影響の検討。
- (b) ケーブル剛性…線形剛性の変化による影響の検討。
- (c) 高さ半径の比…形状の変化による影響の検討。

(a)に関する検討：図6に示すように、軸力密度12倍までは多重安定となり、軸力密度が大きくなると極大点が低くなることが確認された。これは、幾何剛性行列の負の固有値による影響だと考えられる。しかし、13倍以降は図6右にあるように、節点2,3,7,8に大きい変位が現れた。

また、図7にあるように、軸力密度が49~51倍の範囲ではひずみエネルギーがフラットになる現象がみられ、ゼロ剛性と呼ばれる特殊な動きの可能性がある。

(b)に関する検討：図8にあるように、ケーブルの剛性が40N以上であれば、多重安定となり、剛性が大きくなれば極大点も大きくなることが確認された。

(c)に関する検討：図9にあるように、この場合も、 H/R が0.85以上であれば多重安定となり、 H/R が大きくなると極大点が右にずれていく様子が見られた。

最後に、軸力密度を変化させた場合において、5つの場合の負の固有値の数を調べると、多重安定が確認されなかった場合は負の固有値の数が増えていた(図10)。このことから、節点2,3,7,8に大きな変位が現れたのは、負の固有値に対応する固有モードの影響であると考えられる。

以上より、以下の知見が得られた。

- (a), (b), (c)に対し、一定の範囲内なら多重安定となる。
- (a)では、その挙動が大きく変化する。その原因は、極大点付近の負の固有モードによるものだと考えられる。
- 本研究で、多重安定に関する大まかな特徴をとらえられたが、ゼロ剛性のような挙動など、未解明なものがある。

5. まとめ

本研究では、super-stability と多重安定性について考えてきた。テンセグリティ構造は大空間構造等への応用が期待でき、安定な構造であればそれらへの応用もより容易になると考えられる。今後の展望として、super-stability に関しては対称性を低くした場合はどうか、多重安定性に関しては、部材数を増やした場合にはどうなるか、等の疑問が残っており、それらを明らかにしたいと考えている。

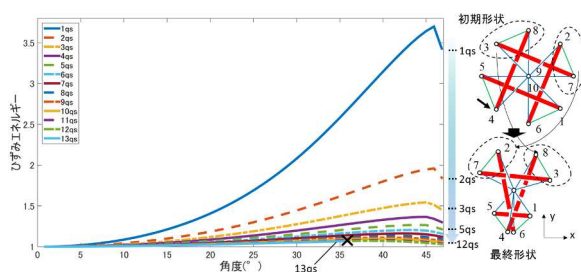


図6 初期軸力密度1~13倍のときのひずみエネルギー

本論文に関する業績

- 1) 岡野正暉, 張景耀: 対称性を利用した角柱状テンセグリティ構造の安定性に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), 2015, 口頭発表.
- 2) 岡野正暉, 張景耀: 二面体群対称であるフォーストラット Multi-stable Star-shaped テンセグリティ構造の特性に関する考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集(九州), 2016, 口頭発表.
- 3) Okano, M. and Zhang, J.Y. Super-stability of symmetric prismatic tensegrity structures based on group representation theory, Proc. Int. Assoc. for Shell and Spatial Structures, Tokyo, Japan, 2016, 口頭発表.
- 4) 岡野正暉, 張景耀: フォーストラット星形テンセグリティ構造の多重安定挙動への影響因子に関する考察, 構造工学論文集 Vol.63B, 2017.3, 掲載予定.

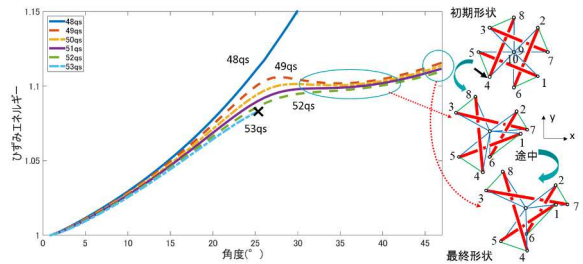


図7 初期軸力密度48~53倍のときのひずみエネルギー

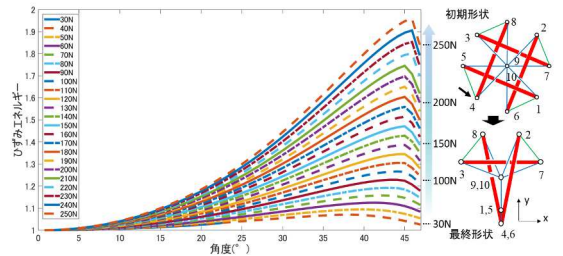


図8 ケーブルの剛性30~250Nのときのひずみエネルギー

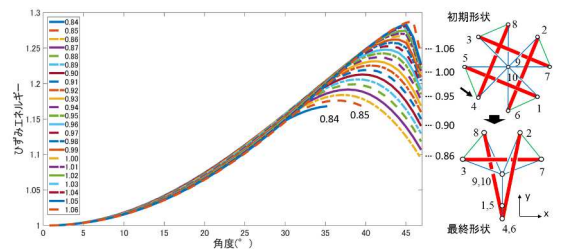


図9 $H/R=0.84\sim1.06$ としたときのひずみエネルギー

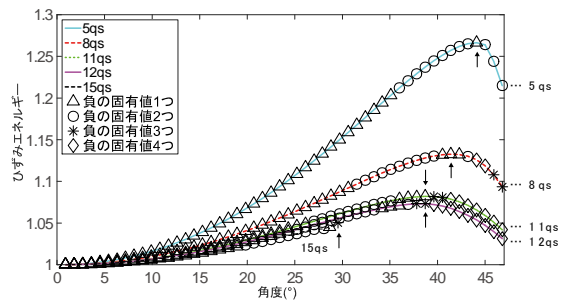


図10 5つの場合のひずみエネルギーと負の固有値の数

参考文献

- 1) <http://kennethnelson.net/category/sculptures/towers/>
- 2) <http://www.iis.u-tokyo.ac.jp/research/chiba-n.html>
- 3) Connelly, R. 1999. Tensegrity Structures: Why are they stable? In: Thorpe, M.F., Duxbury, P.M. (Eds.), *Rigidity Theory and Applications*. Plenum Press, New York, 47-54.
- 4) Defossez, M. 2003. Shape memory effect in tensegrity structures. *Mechanics research communications*, 30(4), 311-316.
- 5) Connelly, R and Terrell, M. 1995. Globally Rigid Symmetric Tensegrities. *Structural Topology*, 59-78.
- 6) Zhang, J. Y. and Ohsaki, M. 2015. *Tensegrity Structures: From, Stability, and Symmetry*, Mathematics for Industry 6, Springer.
- 7) Xu, X. and Luo, Y. 2010. Multistable tensegrity structures. *Journal of Structural Engineering*, 137(1), 117-123.
- 8) Micheletti, A. 2013. Bistable regimes in an elastic tensegrity system. In *Proceedings of the Royal Society of London A*, 469, 20130052.
- 9) Raj, R.P. and Guest, S.D. 2006. Using Symmetry for Tensegrity Formfinding. *Journal of International Association for Shell and Spatial Structures*, 47(3), 1-8.