平成26年度卒業研究概要

対称性を利用した角柱状テンセグリティ構造の安定性に関する研究

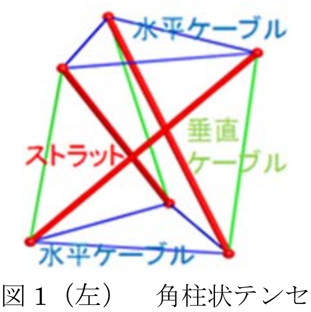
建築都市デザイン学科　115511　岡野正暉
指導教員　　張景耀

1. 序

テンセグリティ構造は、引張材（ケーブル）と圧縮材（ストラット）で構成され、部材に軸力を与えることで安定性を保つという特徴がある。

普通、構造物の安定性評価には、ひずみエネルギーが局所最小となる場合に安定となることを用いる。テンセグリティ構造においては、この評価基準とは別に、無条件安定（super-stability）という安定性基準がある。これは、任意の軸力レベルや材料特性において必ず安定となることを意味し、そのためテンセグリティ構造の安定性評価においては重要な指標となる。

本研究では、テンセグリティ構造のひとつである、図 1 に示されるような角柱状テンセグリティ構造（Prismatic tensegrity structure）、特に、二面体群対称をもつ構造物を研究対象とする。既往研究 [1]では、角柱状テンセグリティ構造の水平ケーブルが隣接節点につながれる場合に無条件安定となることがすでに証明されている。さらに対称性を利用することで軸力密度行列をブロック対角化し、特定のブロックから既往研究の結果が導かれている[2]。しかし他のブロックからの誘導はされておらず、他のブロックと無条件安定性との関係を考える必要がある。



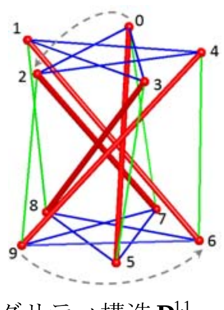


図 1（左）　角柱状テンセグリティ構造 $\mathbf{D}_3^{1,1}$
図 2（右）　$\mathbf{D}_5^{2,2}$ の接続関係。$h=v=2$ なのでそれぞれ反時計回りに 2 つ隣の節点とつながれる。

したがって本研究では、対称性を利用することにより、角柱状テンセグリティ構造が無条件安定となるためのルール性の解明を目的とする。

2. 対称性と接続関係

二面体群とは 2 つの同形の正多角形からなる多角柱の対称性を表した群であり、角柱状テンセグリティ構造はこの二面体群に属している。N を正多角形の頂点の数としたとき、二面体群は $\mathbf{D}_N$ と表され、2 種類の対称操作がある：① z 軸を中心に $2i\pi/N$ 度回転させる N -fold 回転対称操作と②多角形と垂直な辺の中心と原点を結ぶ軸を中心に半回転させる N 個 2-fold 回転対称操作。

また、角柱状テンセグリティ構造の接続関係を $\mathbf{D}_N^{h,v}$ と表す。ここで、h と v はそれぞれ水平ケーブルと垂直ケーブルの接続関係を表す係数である。例えば、図 2 に例を示す。

3. 対称性を利用したブロック対角化

部材長さに対する軸力の比を軸力密度とし、圧縮材、水平ケーブル、垂直ケーブルの軸力密度をそれぞれ q_s 、q_h 、q_v と定義する。対称性を利用することで、角柱状テンセグリティ構造 $\mathbf{D}_N^{h,v}$ の軸力密度行列 $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ を以下のようにブロック対角化することができる[2]。

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{A}_1}_{1\times1} \oplus \tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{A}_2}_{1\times1} \oplus \left(\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{B}_1}_{1\times1}\right) \oplus \left(\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{B}_2}_{1\times1}\right) \oplus 2\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{E}_1}_{2\times2} \oplus \cdots \oplus 2\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{E}_p}_{2\times2} \quad (1)$$

ここで、A_1 、A_2 、B_1 、B_2 、$\mathrm{E}_k\left(k=1,2,\ldots,p\right)$ は二面体群の既約表現であり、p は N が奇数のとき

$p=(N-1)/2$、N が偶数のとき $p=(N-2)/2$ である。また B_1、B_2 は N が偶数の場合のみに存在する。

3 次元のテンセグリティ構造が非退化条件を満たすためには,(1)式の $\tilde{\mathbf{E}}$ が 4 つのゼロ固有値を持つ必要がある。まず $\tilde{\mathbf{E}}^{A_1}$ は常に 0 でその固有値も 0 であり、そのため $\tilde{\mathbf{E}}^{A_2}$ と $\tilde{\mathbf{E}}^{E_k}$ $(k=1,2,\ldots,p)$ がゼロ固有値を持てばよい。したがって、$\tilde{\mathrm{E}}^{A_2}$ と $\tilde{\mathrm{E}}^{E_k}$ の行列式が 0 となることから次の式が導かれる。

$$
\begin{cases} q_v=-q_s \\ t=q_h/q_v=\sqrt{2-2C_{vk}}/(2-2C_{hk}) \end{cases} \tag{2}
$$

ここで、$C_{vk}=2vk\pi/N$、$C_{hk}=2hk\pi/N$ である。

さらに、(2)式を用いると $\tilde{\mathbf{E}}^{E_k}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ を次のように表すことができる。

$$
\frac{1}{q_v}\tilde{\mathbf{E}}^{E_k}=\begin{pmatrix} 2t(1-C_{hk})+1-C_{vk} & -S_{vk} \\ -S_{vk} & 2t(1-C_{hk})-(1-C_{vk}) \end{pmatrix} \tag{3}
$$

4. 無条件安定を保証するための条件

無条件安定を保証するための十分条件として次の 3 つがある[3]。

(a) 軸力密度行列はゼロ固有値を 4 つもつ。

(b) 軸力密度行列は半正定値となる。

(c) 幾何行列はフルランクとなる。

条件(a)は非退化条件を満たすための条件である。また、条件(c)は不可分な構造、つまり分割できない構造であれば満たされる。したがって、条件 (b) を満たすような接続関係が、水平ケーブルが隣接節点につながれる場合以外に存在することを証明すればよい。

そのために、本研究では 上記以外の場合に(1)式が半正定値でゼロ固有値を 4 つだけもつような構造を探す。

5. 結果

(1)式は $\tilde{\mathbf{E}}^{A_1}$ と $\tilde{\mathbf{E}}^{A_2}$ で 2 つのゼロ固有値をもつことから、$\tilde{\mathbf{E}}^{E_k}$ が正の値の固有値と 1 つのゼロ固有値をもつ構造を MATLAB ソフトを用いて見つける。ただし、N が偶数の場合には $\tilde{\mathbf{E}}^{B_1}$ と $\tilde{\mathbf{E}}^{B_2}$ が正の値となっていなければならない。このような無条件安定となる構造を見ていくことで、以下に示すようなルール性が明らかとなった。

- N と h が偶数の場合は無条件安定とならない。
- $hk=jN\pm1$ となる場合には $h=k=1$ と同様の形状が形成されるため無条件安定が保証される。ここで、j は $0\le j\le p^2+1/2p+1$ の範囲の整数であり、この構造は必ず不可分となる。

6. まとめ

$hk=jN\pm1$ となる場合にも、すでに証明されている構造が生成されることが明らかとなった。したがって、ブロック対角化された場合に、$k\neq1$ で水平ケーブルが隣接節点につながれる場合に無条件安定が保証されるということが証明された。

本研究では解明できなかったが、他に無条件安定が保証される構造は存在する可能性が低く、現時点においてはまだ見つかっていない。今後の課題としては、無条件安定となる構造は他にもあるのか、またはないのかを証明する必要がある。

7. 参考文献

[1]R.Connelly and M.Terrell, 1995. Globally Rigid Symmetric Tensegrities(59–78), Structural Topology.

[2]J.Y.Zhang, S.D.Guest and M.Ohsaki, 2009. Symmetric prismatic tensegrity structures: Part II. symmetry-adapted formulations. Int. J. Solids, Structures, Vol. 46(1), pp. 15-30.

[3]J.Y.Zhang and M.Ohsaki, 2007. Stability conditions for tensegrity structures, Int. J. Solids, Structures, Vol. 44, No. 11-12, pp. 3875-3886.