

# ブロック対角化による多面体群対称性を有するテンセグリティ構造の安定性条件

創造理工学専攻 環境都市コース 6164100020-4 津浦 史幸  
(指導教員 張景耀)

## 1. はじめに

テンセグリティとは図1のような連続した引張材 (Cable) と、不連続な圧縮材 (Strut) で構成された構造物のことである。部材にあらかじめ軸力を導入することによって安定させている。その軸力分布と形状には強い相関性があり、構造物全体の剛性に影響するため、形状の決定及び安定性調査は、テンセグリティ構造の設計問題に対して重要な課題となる。

現在、圧縮材が連続していないという特徴を持ったケーブルドームは存在するが、テンセグリティそのものに関しての実用化はされていない。また、テンセグリティを構成する際にも、経験に頼って設計することがほとんどである。これらはテンセグリティの安定化に対する解析があまりされておらず、正確な条件式が導かれていないことが原因と思われる。よって、本研究では、解析によって安定化の条件を理論的に導くことを目的とする。

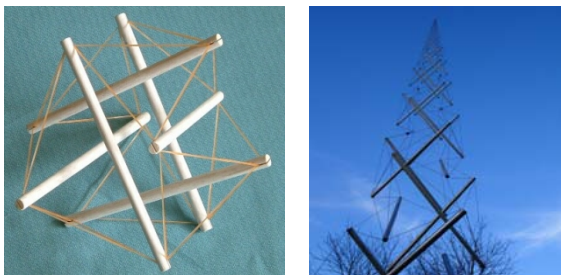


図1 テンセグリティ構造

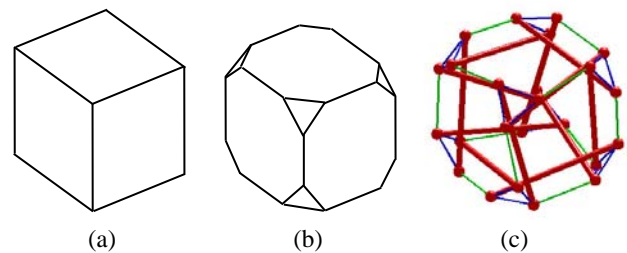


図2 テンセグリティの形状生成

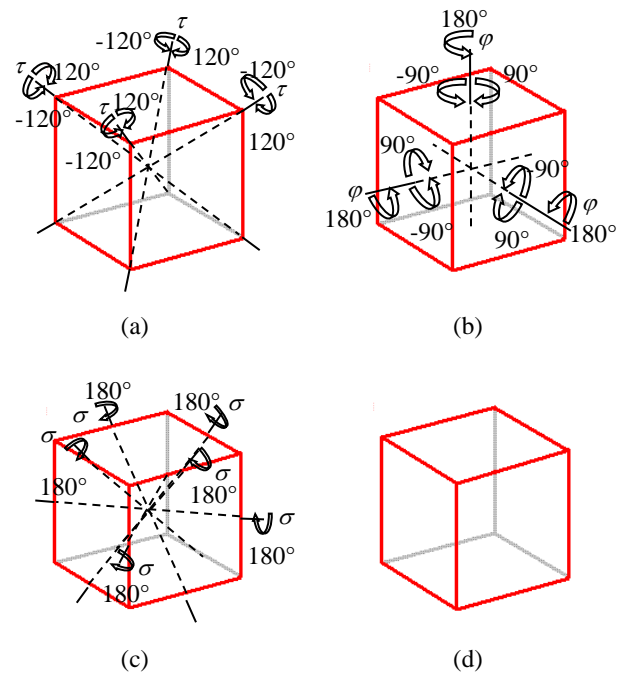


図3 六面体群の対称操作

## 2. 研究の概要

テンセグリティ構造の部材はピンで接合されるので、部材には軸力のみ存在する。また、自己釣り合い状態における安定性調査には、外荷重と自重を考慮しない。本研究では、テンセグリティの中でも比較的簡単な形状である、高度な群対称性を有するものを研究対象とする。

### 2. 1. テンセグリティの形状生成

まず始めに、テンセグリティの形状生成を、六面体群を例として説明する。図2(a)は、正六面体であり、この構造の中心からの半径に垂直な平面で各頂点を切断すると、(b)が形成される。このとき、切断面は正三角形となる。この正三角形の頂点を節点とし、辺をケーブルに置

き換え、隣接した正三角形同士を棒材によって接続する。さらに、構造の中心と、(a)の各頂点を結ぶ線を軸として、各正三角形の節点を特定の角度でねじれを加える。(c)での細線はケーブル、太線は棒材を表している。この時、テンセグリティは特定の角度でねじれさせた時のみ、安定する。

### 2. 2. 高度な群対称性を有するテンセグリティ構造

一般に、構造物が対称性を有するというのは、一定の称性操作によって、構造物の形状 (位置) が操作前と一

致することを意味する。その中でも、どのような対称操作によっても移動しない点が存在する場合、その対称操作の集合を点群という。図3で示しているのは正六面体の対称操作であり、構造物に対してこの対称操作が全て当てはまる時、その構造物は六面体群対称性を有するという。

### 2. 3. 無条件的安定

無条件的安定 (Super-stability) は、接線剛性行列の正定値で定義される通常の安定性基準よりも強い安定性基準である。無条件的安定であるテンセグリティ構造は、部材の剛性や軸力のレベルに関係なく、常に安定になるため、テンセグリティにとって望ましい性質である。

三次元テンセグリティ構造に対しては、下記の無条件的安定の十分条件が証明されている。

- (1) 幾何行列のランクは6である。
- (2) 軸力密度行列は半正定値である。
- (3) 軸力密度行列のランク落ちは4以上である。

軸力密度行列とは、部材の接続関係を行列であらわしたものである。上記の条件のうち、(1)と(2)はテンセグリティ構造の無条件的安定の必要条件でもある。(1)は常に満たされるため、本研究では(2)の条件のみに注目する。

### 2. 4 ブロック対角化

群の表現理論に基づいて、行列を基底 (座標) 変換によって個々のブロックに変換することをブロック対角化という。行列要素がブロック対角化されていない行列を可約表現、ブロック対角化された個々の行列を既約表現という。ブロック対角化を行うと、図4のように対角上に値が集合し個々のブロックを形成し、それ以外は0となる。ブロック対角化を行うことで、行列の解析が比較的容易になる。

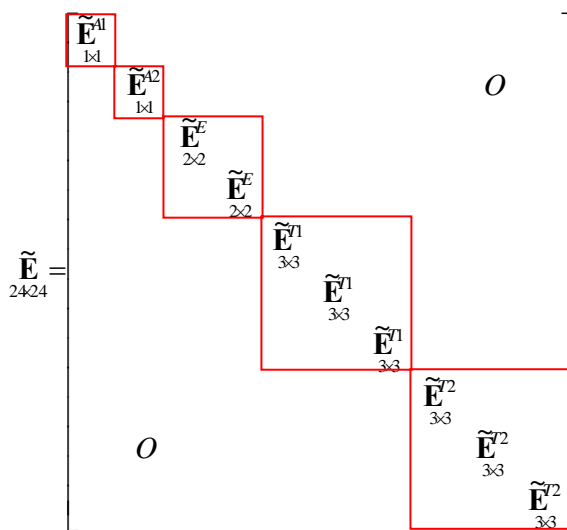


図4 ブロック対角化後の行列

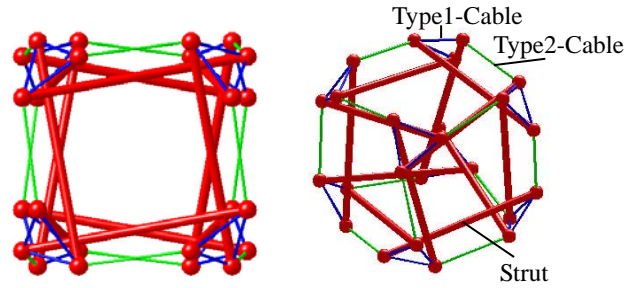


図5 六面体群対称性を有するテンセグリティ構造

	$E$	$8C_3$	$3C_2$	$6C_4$	$6C_4$
$A_1$	1	1	1	1	1
$A_2$	1	1	1	-1	-1
$2E$	4	-2	4	0	0
$3T_1$	9	0	-3	3	-3
$3T_2$	9	0	-3	-3	3
=	24	0	0	0	0

図6 六面体群の指標表

### 3. 六面体群対称性を有するテンセグリティ構造

研究の手法を、六面体群対称性を有するテンセグリティ構造を例として説明する。

#### 3. 1. 概要

六面体群の対称操作は図3に示したとおり24個あり、それぞれは、

- (a) 頂点と六面体の中心を結ぶ軸とした回転  $\tau$  : 8個
- (b) 向かい合う面の中心を結ぶ軸とした回転  $\phi$  : 9個
- (c) 向かい合う辺の中心を結ぶ軸とした回転  $\sigma$  : 6個
- (d) 恒等操作  $E$  : 1個

である。図5のように、構造物の任意の節点は、2本のType1ケーブル、1本のType2ケーブルおよび1本の棒材でほかの節点に繋がっているため、対称操作と一対一の対応関係により、節点の数は24個、構成部材は、24本のType1ケーブル、12本のType2ケーブル、12本の棒材である。また、部材の軸力と部材長の比を軸力密度と定義し、 $q_h$ 、 $q_v$ と $q_s$ をそれぞれType1、Type2のケーブルおよび棒材の軸力密度とする。

#### 3. 2. 指標表

図6は六面体群の既約表現の指標表である。指標とは、行列の対角要素の和のことである。図6の(a)は、既約表現を表しており、 $A$ は一次元既約表現、 $E$ は二次既約表

現、 $T$  は三次元既約表現を示している。(b)は対称操作であり、それぞれ、

$$E = \text{恒等操作} \quad C_3 = \tau = 120^\circ, 240^\circ \text{ 回転}$$

$$C_2 = \sigma = 180^\circ \text{ 回転} \quad C_4 = \varphi = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ \text{ 回転}$$

である。(c)は指標を示している。

### 3. 3. 軸力密度行列のブロック対角化

六面体群対称性を有するテンセグリティ構造の軸力密度行列を基底変換によって、ブロック対角化すると、図4のように5つのブロックに変換することができる。これによって、全体ではなく、各ブロックの固有値を求めるだけで全体の固有値を求めることができるので、無条件の安定となるための軸力同士の関係を比較的容易に導くことができる。なお、各ブロックは既約表現と対応しており、それぞれ以下ようになる。

$\tilde{\mathbf{E}}^{A1}$  : 既約表現  $A_1$  に対応する一次元行列

$\tilde{\mathbf{E}}^{A2}$  : 既約表現  $A_2$  に対応する一次元行列

$\tilde{\mathbf{E}}^E$  : 既約表現  $E$  に対応する二次元行列

$\tilde{\mathbf{E}}^{T1}$  : 既約表現  $T_1$  に対応する三次元行列

$\tilde{\mathbf{E}}^{T2}$  : 既約表現  $T_2$  に対応する三次元行列

### 3. 4. 対称操作

前述の通り、図3のように六面体群には対称操作が24個あり、それぞれを行列であらわすと以下ようになる。

(a)頂点と六面体の中心を結ぶ軸とした回転  $\tau$

$$\tau_1^1 = [y, z, x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tau_1^2 = [z, x, y] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2^1 = [-z, -x, y] \quad \tau_2^2 = [-y, z, -x]$$

$$\tau_3^1 = [y, -z, -x] \quad \tau_3^2 = [-z, x, -y]$$

$$\tau_4^1 = [z, -x, -y] \quad \tau_4^2 = [-y, -z, x]$$

(b)向かい合う面の中心を結ぶ軸とした回転  $\varphi$

$$\varphi_1^1 = [-x, -y, z] \quad \varphi_1^2 = [-y, x, z] \quad \varphi_1^3 = [y, -x, z]$$

$$\varphi_2^1 = [-x, y, -z] \quad \varphi_2^2 = [-z, y, x] \quad \varphi_2^3 = [z, y, -x]$$

$$\varphi_3^1 = [x, -y, -z] \quad \varphi_3^2 = [x, z, -y] \quad \varphi_3^3 = [x, -z, y]$$

(c)向かい合う辺の中心を結ぶ軸とした回転  $\sigma$

$$\sigma_1 = [z, -y, x] \quad \sigma_2 = [-x, -z, -y] \quad \sigma_3 = [-z, -y, -x]$$

$$\sigma_4 = [-x, z, y] \quad \sigma_5 = [y, x, -z] \quad \sigma_6 = [-y, -x, -z]$$

(d)恒等操作  $E$

$$E = [x, y, z]$$

### 3. 5. 各ブロックの固有値

zhang ら[1,2]の研究により、各ブロックの行列  $\tilde{\mathbf{E}}^\mu$  は、

$$\tilde{\mathbf{E}}^\mu = (2q_h + q_v + q_s)\mathbf{I} - q_h(\rho(\tau_h^1) + \rho(\tau_h^2)) - q_v\rho(\sigma_v) - q_s\rho(\sigma_s)$$

となる。 $h=1,2,3,4; v,s=1,2,3,4,5,6(v \neq s)$  であり、 $\mathbf{I}$  は単位行列で、 $\mu$  が一次元既約表現ならば  $1 \times 1$  行列になり、 $\mu$  が三次元既約表現ならば  $3 \times 3$  行列になる。

$h, s, v$  は部材の接続のパターンによって変わるが、それによって固有値の値が変わることは無い。

上式より、 $\tilde{\mathbf{E}}^{A1}$  は、

$$\tilde{\mathbf{E}}^{A1} = (2q_h + q_v + q_s) - q_h(1+1) - q_v - q_s = 0$$

となり、固有値は常に0になる。同様に、

$$\tilde{\mathbf{E}}^{A2} = (2q_h + q_v + q_s) - q_h(1+1) + q_v + q_s = 2(q_v + q_s)$$

となり、 $q_v > -q_s$  の時、固有値は0以上となる。

次に、 $\tilde{\mathbf{E}}^E$  は二次元行列なので、固有値は二個存在する。よって、

$$\tilde{\mathbf{E}}^E = (2q_h + q_v + q_s)\mathbf{I} - q_h \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) - q_v \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - q_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\tilde{\mathbf{E}}^E - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-6q_h - 2q_v - 2q_s) + 9q_h^2 + 6q_hq_v + 6q_hq_s + 3q_sq_v = 0$$

二次方程式の解の公式より、

$$\lambda = 3q_h + q_v + q_s \pm \sqrt{q_v^2 + q_s^2 - q_vq_s}$$

となる。図7は、固有値と軸力の関係をプロットしたものである。ここで、 $q_s$  は棒材の軸力なので必ず負の値となり、 $q_h, q_v$  はケーブルの軸力なので、必ず正の値となる。以上より、図7(a)の網掛け領域 ( $q_v > -q_s > 0$ ) のみ固有値が正定値となる範囲である。

次に、 $\tilde{\mathbf{E}}^{T1}$  は三次元行列なので、固有値は三個存在する。 $h=1, v=1, s=5$  のとき、

$$\tilde{\mathbf{E}}^{T1} = (2q_h + q_v + q_s)\mathbf{I} - q_h(\rho(\tau_1^1) + \rho(\tau_1^2)) - q_v\rho(\sigma_1) - q_s\rho(\sigma_5)$$

$$= \begin{pmatrix} 2q_h + q_v + q_s & -q_h - q_s & -q_h - q_v \\ -q_h - q_s & 2q_h + 2q_v + q_s & -q_h \\ -q_h - q_v & -q_h & 2q_h + q_v + 2q_s \end{pmatrix}$$

$$\det(\tilde{\mathbf{E}}^E - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

よって、 $\lambda = 0$

もしくは、二次方程式の解の公式より、

$$\lambda = 3q_h + 2q_v + 2q_s \pm \sqrt{-(2q_h q_v + 2q_h q_s + 3q_s q_v)}$$

となる。図 7 (b)は固有値と軸力の関係をプロットしたものであり、網掛け領域 ( $q_v > -q_s > 0$ ) のみが固有値が正定値となる範囲である。

$\tilde{\mathbf{E}}^{T2}$  においても、 $\tilde{\mathbf{E}}^{T1}$  と同様の手法で計算していくと、 $\lambda = 0$ 、もしくは

$$\lambda = 3q_h + 2q_v + 2q_s \pm \sqrt{4q_s^2 + 4q_v^2 + 2q_h q_v + 2q_h q_s + 10q_s q_v}$$

となり、図 7 (c)の網掛け領域 ( $q_v > -q_s > 0$ ) のみが固有値が正定値となる範囲である。また、図 7 (d)は軸力同士の関係をプロットしたものである。以上全ての結果から、軸力の関係が  $q_v > -q_s > 0$  の時、全てのブロックで固有値が 0 以上となり、無条件的安定となる為の条件を満たす。

### 3. 6. 他の多面体群対称性を有するテンセグリティ

六面体以外においても、同様の手法で無条件的安定となるための条件を導くことができる。図 8 では、八面体群対称性を有するテンセグリティ構造の解析結果であり、軸力の関係が  $q_v > -q_s > 0$  の時、全てのブロックで固有値が 0 以上となり、無条件的安定となる為の条件を満たす。

### 4. まとめ

本研究では、対称性及び群論を用いたブロック対角化によって、テンセグリティが安定となるための軸力の条件を理論的に導いた。本紙では六面体群と八面体群のみの説明だが、他の高度な群対称性を有するテンセグリティ構造においても同様の手法で条件を求めることができる。

### 参考文献

- 1) Zhang JY, Guest GD, and Ohsaki M: Symmetric prismatic tensegrity structures: Part I. configuration and stability, *Int. J. Solids, Structures*, 2009; **46**: 1-14.
- 2) Zhang JY, Guest SD, and Ohsaki M.: Symmetric prismatic tensegrity structures: Part II. Symmetry-adapted formulations, *Int. J. Solids, Structures*, 2009; **46**: 15-30.
- 3) Hidenori Murakami, Yoshitaka Nishimura: Static and dynamic characterization of regular truncated icosahedral and dodecahedral tensegrity modules, *Int. J. Solids, Structures*, 2001; **38**: 9359-9381

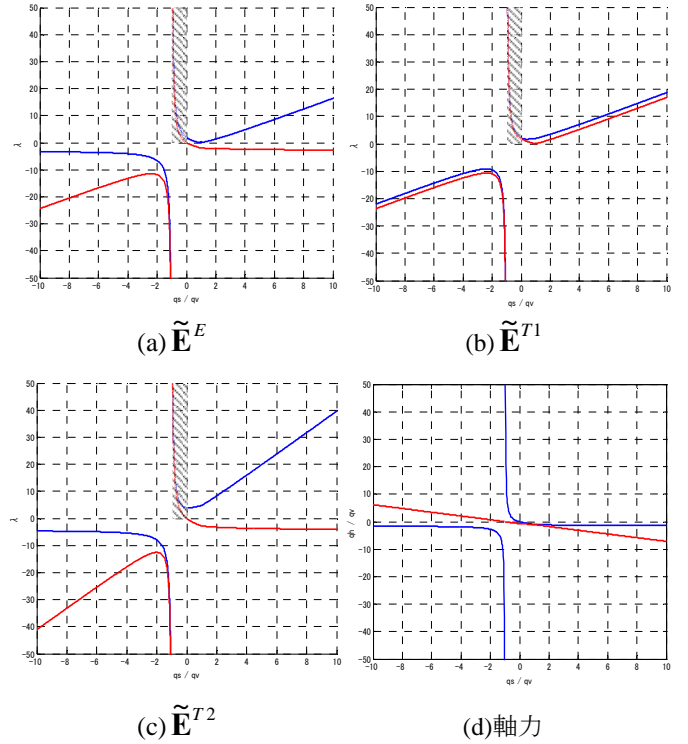


図 7 六面体群の各ブロックの固有値と軸力の関係

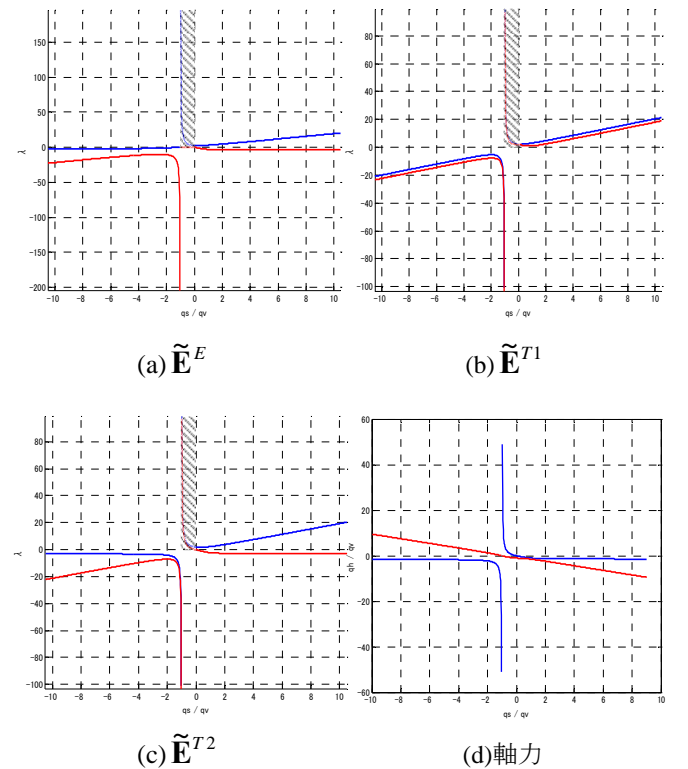


図 8 八面体群の各ブロックの固有値と軸力の関係