ベジェ曲線を用いたシェル構造の形状最適化

都市システム工学科　2160070102-6　渡　　大樹
（指導教員　張景耀）

１．はじめに

近年、コンピュータの普及とその急速なコンピュータ技術の発展により、構造解析・シミュレーション技術もより高度なものとなり、それらは幾何学的な形態にとらわれない自由な形態の構造物の実現を可能にしてきた。しかし、技術の発展がどのような形態をも可能にするかというと必ずしもそうではない。複雑な形態を持つ構造物の力学的挙動は複雑であり、シドニーのオペラハウスの設計事例に見られるように、設計案と実構造物とが異なる例も存在する。特に、シェル構造においてはその形態と力学的合理性に強い相関を持つことから設計者の経験と直感によって実現可能な形状を決定することは困難である。

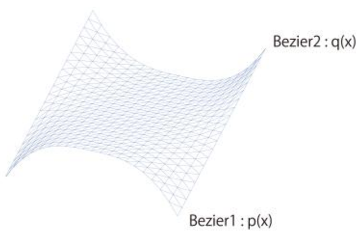
本研究では自由度の高い形状表現が可能なベジェ曲線を用いて最適化することにより、設計者の設定した初期解により近い最適解得て、設計者の意図も考慮しながら構造的にも満足するような形態を創生することを目的としている。

２．研究概要

2.1 最適化の対象

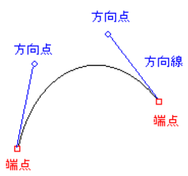
研究の最適化の対象として扱うのはスペインの彫刻家アントニオ・ガウディによる作品であるサグラダ・ファミリア付属学校の屋根のような曲面屋根を扱うものとする。

2.1.1 ベジェ曲線



本研究ではシェル屋根の両端側面の形状にベジェ曲線を用いてそれぞれを表現し、曲線間は直線の部材を用いてシェル屋根を表現する。

ベジエ曲線は方向点と端点により構成され、通常の曲線とは異なり端部を除きデータ点を通らない。
また曲線の形状は方向点によって決められる。



ここで、両端のベジェ曲線は次のように表せる。

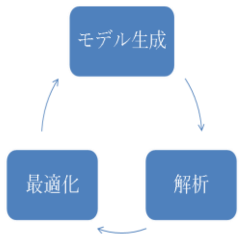
$$p(t) = \sum_{i=0}^{m-1} B_{i,m-1}(t) Q_i = \sum_{i=0}^{m-1} {}_{m-1}C_i (1-t)^{m-i-1} t^i Q_i$$

ここで、Q_i はベジェ曲線上の制御点の z 座標であり、m－1 はそれぞれ 1 本の曲線上の制御点の個数に等しい。

2.2 最適化の流れ

最適化は以下のように行う。

まず、手動で初期解にあたる数値をベジェ曲線の制御点に入力し、初期モデルを生成する。



その初期状態のモデルに対して最適化理論に基づく最適化を実行し、得られた形状に対して応力解析を行い新たなモデルを生成する。このサイクルを繰り返してゆくことにより、構造的な制約を十分に満たす形態がつくられる。
また本最適化は局所最適解をそれぞれ求めたものである。

2.3 応力評価

最適化の各ステップにおける応力評価は有限要素法に基づき行うものとする。その際、面内応力と面外の曲げモーメントを考慮した板要素を採用し、自重のみを考慮している。

2.4 最適化の手法

今回取り扱うのは最適化問題の中でも制約つきの非線形最適化となるため、その主な解法として射影勾配法、ペナルティ関数法、乗数法、逐次二次計画法、内点法が挙げられる。その中でも実用性が高く、数百変数程度の中規模問題まで有効とされている逐次二次計画法を採用している。

SHAPE OPTIMIZATION OF SHELL STRUCTURES WITH BEZIER CURVE BOUNDARIES

Daiki WATARI

2.5 設計の詳細

構造解析ならびに最適化のプログラムは数値解析ソフト Matlab を利用し作成した。対象には右図のような正方形平面を有するシェル構造物を用いる。

目的関数を構造物のひずみエネルギーとし、制約関数として制御点の高さに制限を設け、両端側面のベジエ曲線の z 座標 $q(z)$ を設計変数として形状最適化を行う。構造体には自身の自重のみを考慮し、シェルの厚みは一様としている。さらに、座標のみの異なる同曲面が求まることをさけ、またその事により最適解が不安定となる事を避けるため、ベジェ曲線１の p0 点に数値０を代入し定数とすることにより１点を固定している。

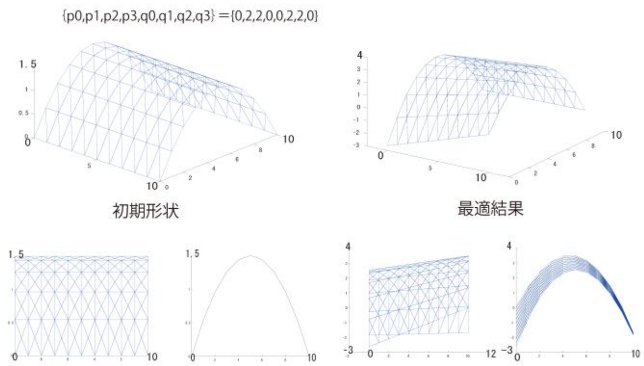
$$\text{minimize} \quad f(x) = \frac{1}{2} d^{\mathrm{T}} K d$$

$$\text{subject to} \quad -5 \le q_z \le 5$$

３．結果

最適化を行った結果は下記の通りである。

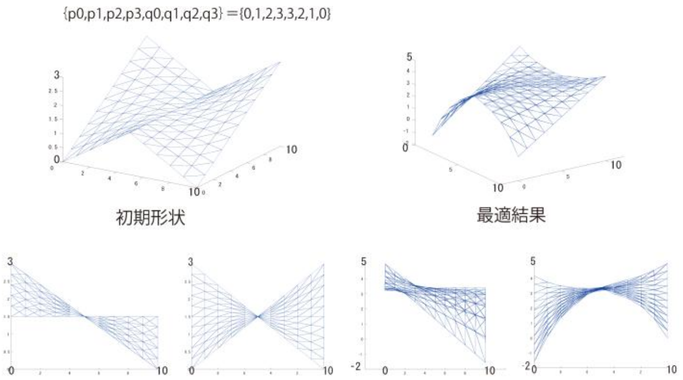
《 数値解析例１ 》



ライズ	1.5 → 7	[m]
ヤング係数	20.00	[GPa]
ポアソン比	0.25	
シェル厚(一定)	0.10	[m]
構造物の規模	10×10	[m^2]

一見して形状としては安定している構造であり、最適結果を見てみると自重に耐えるためにシェルのライズが高くなっていることがわかる。ただ、最適結果との変化もそれほど大きくは見られないため、初期状態が最適に近い形態であったことがわかる。

《 数値解析例２ 》



ライズ	3 → 7	[m]
ヤング係数	20.00	[GPa]
ポアソン比	0.25	
シェル厚(一定)	0.10	[m]
構造物の規模	10×10	[m^2]

こちらの解析結果でもシェルの高さ方向への変形が見られ、さらに、全体に軽く丸みを帯びた形態となった。

ただ、先ほどの結果とは異なり、完全に上に凸である形態ではない。

４．まとめ

4.1 本研究のまとめ

今回の研究では設計変数８つ、制約条件１つ、目的関数１つのもとで形状最適化を行った。また、プログラムの設計規模として 10m×10m の正方形平面を有するシェルを使用していた。いくつかの数値解析を行った結果、初期値で任意に与えたにもかかわらず、最適解は意外にも少なく、上記に挙げた解析例に似た形態が多く見られた。このことはまばらであった初期解が正確に局所最適解に収束していることを示していると言える。

4.2 今後の課題

今後の課題としては、設計規模を広げていきそれにつれ最適形状がどのように変わってゆくかを比較することや、その際に解が収束し易いように制約関数に新たな条件をもうけること、またシェル厚は一定ではなく可変として、設計変数を増やした状態で最適化を行うことなどが挙げられる。

参考文献

１）『Felix Candela Engineer, Builder, Structural Artist』または出版年
２）『工学のための最適化手法入門』天谷賢治、数理工学社
３）『誰でもわかる Matlab』池原雅章・奥田正浩・長井隆行共著、倍風館
４）『Matlab による数値計算』大石進一著、倍風館
５） ORwiki、制約付き最適化
メインページ　http://www.orsj.or.jp/~wiki/wiki/index.php/