多面体群対称性を有するテンセグリティ構造の自己釣合解析

建築都市デザイン学科　2280060034-4　津浦　史幸
（指導教員　張景耀）

１．はじめに

テンセグリティは連続な引張材（ケーブル）と、不連続な圧縮材（棒材）によって構成される構造物である。彫刻家のケネス・スネルソンが原型を考案し、バックミンスター・フラーが TENSion（張力）と intEGRITY（統合）の二つの言葉を合成して名付けた。その特殊な性質や力学特性から、建築だけではなく様々な分野で研究が進められている。

テンセグリティは、無応力状態では不安定だが、部材に軸力を導入することによって安定化させている。しかし、他の張力構造とは違って圧縮材も存在するため、必ずしも安定するとは限らない。よって、軸力分布や形状の決定、及び導入した軸力に対する安定性調査が、テンセグリティ構造を構成するうえでの重要な課題となる。

テンセグリティの安定性調査に、無条件安定という安定性基準を用いる。無条件安定では部材の剛性や形状、軸力の大きさに関係なく必ず安定となる。つまり、軸力の管理が難しいテンセグリティにとっては、無条件安定となることが望ましい。本研究は、構造物の対称性を利用して、自己釣合式を求め、無条件安定となる条件を導くことを目的とする。

(a)四面体群　　(b)十二面体群

図１．多面体群対称性を有するテンセグリティ

２．概要

本研究では、多面体群対称性を有するテンセグリティ構造（四面体、六面体、八面体、十二面体）[図１]を対象としている。対称性を有するとは、一つの要素（節点)をある対称操作によって別の全ての要素の位置に移動でき、尚且つ同一の物体を得ることができることをいう。

ここで、部材の軸力と部材長の比を軸力密度として定義する。テンセグリティ構造には以下の３つの軸力密度が存在する。

q_h：他の接点と結合しているケーブルのうち、多角形のもの

q_v：多角形ケーブルに結合しているケーブル

q_s：棒材

構造物の対称性によると、同じ種類の部材は同じ長さと軸力、すなわち同じ軸力密度を有する。また節点の自己釣合いを同一の式で表現することができる。つまり、テンセグリティ構造全体の自己釣合方程式を立てずに、一つの節点の釣合状態だけを考えればよい。

テンセグリティ構造に対して無条件安定となる十分条件は、すでに証明されている。

(a)軸力密度行列は半正定値（固有値がすべて 0 以上）である

(b)軸力密度行列のランク落ち（ゼロ固有値の数）は４である

(c)幾何行列はフルランクである。

軸力密度行列は、各節点同士の軸力の関係を行列で表したものである。節点の数が多いほど、要素数も多くなる。

研究の手法として、まず任意の節点での釣合方程式を立てる。釣合方程式から、各軸力密度の関係を求め、それを軸力密度行列に代入し、上記の条件を満たす軸力密度の範囲を導く。その範囲に存在する軸力密度のとき、テンセグリティは無条件安定となる。

３．四面体群対称性を有するテンセグリティ構造

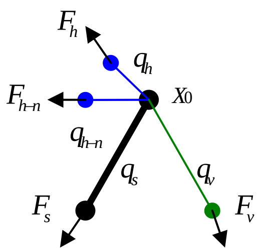


図２．節点の自己釣合

四面体群の任意の節点をX_0とすると、多角形ケーブルによって結合している節点(X_hとする)との関係を

$X_h = R_h \times X_0$（R_h：対称操作を 3×3 行列で表したもの)

ベクトルを、

$D_h = X_h - X_0 = (R_h - I)X_0$（$I$：3×3 単位行列)

と表せる。また、軸力ベクトルをF_hとすると、

$$F_h = q_h D_h = q_h (R_h - I) X_0$$

となる。他の節点においても、同様の操作で軸力ベクトルを求めることができる。(F_{h-n}、F_s、F_v とする)
節点は釣合状態［図２］なので、

$$F_h + F_{h-n} + F_s + F_v = 0$$
$$S_{xyz} X_0 = 0$$
$$(S_{xyz} = \{q_h(R_h - I) + q_h(R_{h-n} - I) + q_v(R_v - I) + q_s(R_s - I)\})$$

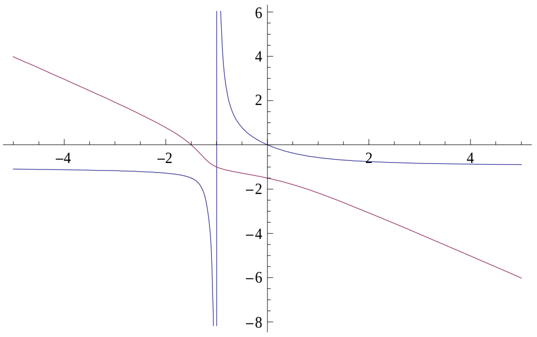
となる。ここで、各対称操作は、
R_h＝Z 軸周りに 120 度回転
R_{h-n}＝Z 軸周りに-120 度回転
R_v＝四面体の中心とケーブルの中心を結ぶ線分を軸とした 180 度回転
R_s＝四面体の中心と棒材の中心を結ぶ線分を軸とした 180 度回転
であるので、それぞれ行列で表して代入すると、

$$2q_h\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q_s\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} + q_v\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = 0$$

となる。ここから行列式を求め、まとめると、

$$3(x+y) + 2(x^2 + y^2 + 3xy) + xy(2x + 3y)$$
$$x = \frac{q_s}{q_h} < 0、 y = \frac{q_v}{q_h} > 0$$

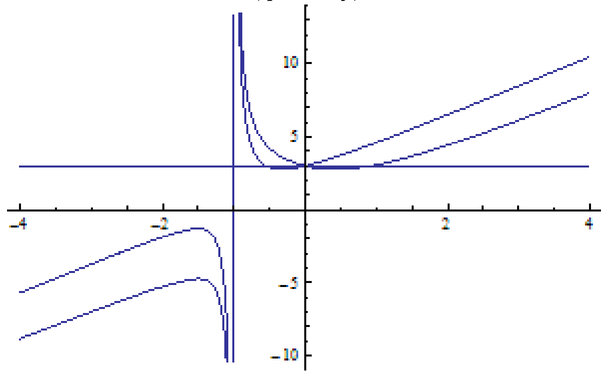
と表すことができる。x-y の関係をグラフで示すと、



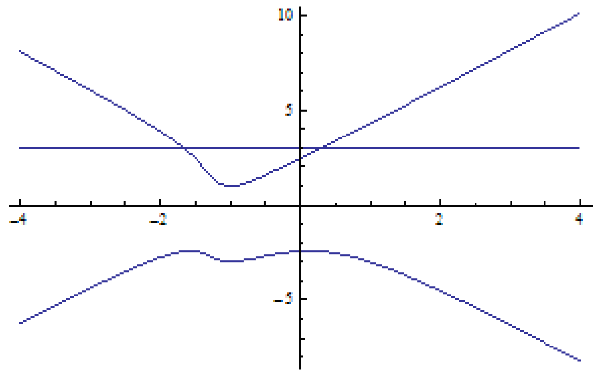
である。(横軸 x、縦軸 y、－１は漸近線)
四面体の軸力密度行列は、

$$q_h\begin{bmatrix} q & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & q & -1 & 0 & -y & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & q & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & q & -1 & -1 & -x & 0 & 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 & -1 & q & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x & -1 & -1 & q & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & q & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q & -1 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & -1 & -1 & q & 0 & 0 & -x \\ -x & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & -y & 0 & -1 & q & -1 \\ 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & -1 & -1 & q \end{bmatrix}$$

(q=2+x+y)



(c)



（d）

図３．固有値と軸力密度の関係
（c、d共に横軸はx、縦軸は固有値
また、x軸上に４本,線分が存在する
x=0 で不連続）

なので、ここに x-y 関係を代入すると、図 c、d のようになる。無条件安定となるには固有値が全て ０ 以上であるため、図 d は無視してよい。また x ＜ 0 であることから、求める範囲は図 c の 0< x ＜ -1 となり、この範囲に存在する軸力密度のとき、四面体群テンセグリティは無条件安定になる。

４．まとめ

本研究では、多面体群対称性を有するテンセグリティ構造において、自己釣合いの観点から無条件安定となるための軸力密度の範囲を導き出した。なお、本紙では四面体群だけだが、他の多面体群においても同様の手法で導くことができる。

参考文献

１）J.Y.Zhang and M.Ohsaki : Stability conditions for tensegrity structures, International Journal of Solids and Structures, vol.44(11-12) , page3875-3886, 2007
２）J.Y.Zhang, S.D.Guest, M.Ohsaki : Symmetric prismatic tensegrity structures:Part1. Configuration and stability, International Journal of Solids and Structures,vol.46(1-14),2009
３）今野　豊彦：物質の対称性と群論、2001