

張 景耀

構造力学

Structural Mechanics, Version 0.9

June 13, 2018

Contents

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | 序 | 1 |
| 1.1 | 科目概要 | 1 |
| 1.1.1 | 狙い | 1 |
| 1.1.2 | 位置づけ | 1 |
| 1.1.3 | 内容 | 2 |
| 1.1.4 | 宿題 | 2 |
| 1.1.5 | 評価方法 | 2 |
| 1.2 | 構造力学演習 | 2 |
| 1.3 | 資料 | 3 |
| 1.3.1 | 講義ノート | 3 |
| 1.3.2 | 参考資料 | 3 |
| 1.4 | アドバイス | 3 |
| 2 | 力の基本 | 5 |
| 2.1 | 力の要素と力の表記 | 5 |
| 2.1.1 | 力の三要素 | 5 |
| 2.1.2 | 力の表記 | 5 |
| 2.2 | 力の分解・合成 | 6 |
| 2.2.1 | 力の分解 | 7 |
| 2.2.2 | 力の合成 | 8 |
| 2.3 | 力の釣合い | 9 |
| 2.4 | モーメントおよびその釣合い | 10 |
| 2.4.1 | モーメント | 11 |
| 2.4.2 | モーメントの釣合い | 11 |
| 2.4.3 | パリニオンの定理 | 13 |
| 2.4.4 | 偶力 | 14 |
| 2.5 | (国際)単位(系)(International System of Units) | 14 |
| 2.6 | 宿題 | 15 |
| 3 | 建物のモデル化および性質 | 17 |
| 3.1 | 外力のモデル化 | 17 |
| 3.1.1 | 集中荷重と分布荷重 | 18 |
| 3.1.2 | 分布荷重の種類と数学的定義 | 18 |
| 3.1.3 | 分布荷重から集中荷重への変換 | 19 |
| 3.2 | 建物のモデル化 | 22 |
| 3.2.1 | 部材と接合部 | 23 |
| 3.2.2 | 支点と反力 | 24 |
| 3.2.3 | 反力の求め方 | 26 |
| 3.2.3.1 | 片持ち梁の反力 | 26 |
| 3.2.3.2 | 単純梁の反力 | 27 |

| | | |
|----------|---------------------------|-----------|
| 3.2.3.3 | 静定ラーメン構造の反力 | 28 |
| 3.2.3.4 | 3 ヒンジラーメン構造の反力 | 29 |
| 3.3 | 断面力（軸力、曲げモーメント、せん断力） | 31 |
| 3.4 | 宿題 | 32 |
| 4 | 静定トラス構造 | 35 |
| 4.1 | トラス構造の力学特性 | 35 |
| 4.2 | トラス構造の静定・安定 | 36 |
| 4.2.1 | 静定と不静定 | 36 |
| 4.2.2 | 安定と不安定 | 37 |
| 4.2.3 | Maxwell's ルール | 38 |
| 4.2.3.1 | Maxwell's ルールの例外 | 38 |
| 4.3 | トラス構造の断面力（軸力）の解法 | 39 |
| 4.3.1 | 切断法 | 40 |
| 4.3.2 | 節点法 | 41 |
| 4.3.3 | 切断法と節点法の比較 | 43 |
| 4.4 | トラス構造のための行列解法 | 43 |
| 4.5 | 宿題 | 46 |
| 5 | 静定梁と静定ラーメン構造の断面力計算 | 47 |
| 5.1 | 静定・不静定の判断 | 47 |
| 5.2 | 静定梁 | 49 |
| 5.2.1 | 片持梁 | 50 |
| 5.2.2 | 単純梁 | 52 |
| 5.2.3 | ゲルバー梁 (Gerber Beam) | 54 |
| 5.3 | M-Q 関係 | 56 |
| 5.4 | ラーメン構造の断面力分布 | 57 |
| 5.5 | 計算結果の検算 | 58 |
| 5.6 | 宿題 | 59 |
| 6 | 応力と断面性質 | 61 |
| 6.1 | 応力とひずみ | 61 |
| 6.1.1 | 応力 | 61 |
| 6.1.2 | ひずみ | 62 |
| 6.1.3 | モールの応力円 | 63 |
| 6.2 | 構造設計の基本 | 65 |
| 6.2.1 | 材料強度 | 65 |
| 6.2.2 | 構造設計の理念（一次設計） | 65 |
| 6.3 | 断面力と応力 | 65 |
| 6.3.1 | 軸力による垂直応力 | 65 |
| 6.3.2 | 曲げモーメントによる垂直応力 | 66 |
| 6.3.3 | 複合効果による垂直応力 | 67 |
| 6.3.4 | せん断応力 | 67 |
| 6.4 | 断面性質 | 68 |
| 6.4.1 | 図心と断面一次モーメント | 68 |
| 6.4.1.1 | 定式化 | 69 |
| 6.4.1.2 | 直角四辺形の図心 | 69 |
| 6.4.1.3 | 直角三角形の図心 | 70 |
| 6.4.1.4 | 円形の図心 | 71 |
| 6.4.1.5 | 複合図形の図心 | 71 |
| 6.4.2 | 断面二次モーメントと断面係数 | 72 |
| 6.4.2.1 | 中立軸と図心 | 72 |
| 6.4.2.2 | 直角四辺形 | 73 |
| 6.4.2.3 | 三角形と円形 | 73 |
| 6.4.2.4 | 平行軸定理 | 74 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 6.4.2.5 | 複合図形 | 74 |
| 6.4.3 | 主軸、断面相乗モーメント | 76 |
| 6.5 | 宿題 | 76 |
| 7 | 静定構造の変形 | 79 |
| 7.1 | 弾性曲線式による梁の変形 | 79 |
| 7.1.1 | 基本式 | 79 |
| 7.1.2 | 曲げモーメントの式は一つの場合 | 80 |
| 7.1.3 | 曲げモーメントの式は多数の場合 | 81 |
| 7.2 | モールの定理 | 83 |
| 7.2.1 | 片持梁 | 84 |
| 7.2.2 | 単純梁 | 85 |
| 7.2.3 | 張出梁とゲルバー梁 | 86 |
| 7.3 | 仮想仕事法 | 87 |
| 7.3.1 | 仮想仕事の原理 | 87 |
| 7.3.2 | 単位荷重法によるトラス構造の変形 | 88 |
| 7.3.3 | 単位荷重法による梁の変形 | 89 |
| 7.3.4 | 単位荷重法によるラーメン構造の変形 | 91 |
| 7.4 | 宿題 | 92 |
| 8 | 不静定構造の断面力 | 95 |
| 8.1 | 不静定構造の定義と解法 | 95 |
| 8.2 | 不静定トラス構造 | 96 |
| 8.3 | 不静定梁 | 97 |
| 8.4 | 不静定ラーメン構造 | 100 |
| 8.5 | 宿題 | 102 |
| 9 | たわみ角法 | 105 |
| 9.1 | 基本式 | 105 |
| 9.1.1 | 梁端曲げモーメントによる回転角 α_{AB} と α_{BA} | 105 |
| 9.1.2 | 節点移動と回転角 | 106 |
| 9.1.3 | 中間荷重と回転角 | 107 |
| 9.1.4 | 回転角と曲げモーメントの一般式 | 107 |
| 9.1.5 | Remarks | 108 |
| 9.2 | 節点移動なし | 108 |
| 9.3 | 節点移動あり | 112 |
| 9.3.1 | 節点荷重 | 116 |
| 9.4 | マトリックス法 | 116 |
| 9.5 | 宿題 | 117 |
| 10 | 構造物の非線形挙動 | 121 |
| 10.1 | 座屈 | 121 |
| 10.1.1 | オイラー座屈 | 122 |
| 10.2 | 塑性 | 124 |
| 10.2.1 | 鋼材の応力-ひずみ関係 | 124 |
| 10.3 | 構造設計（一次設計） | 125 |
| 10.3.1 | 基準強度 F と引張強度 F_u | 126 |
| 10.3.2 | 許容応力度 | 126 |

Chapter 1

序

Abstract この章には、構造力学の概要・意義・目的を説明する。

1.1 科目概要

1.1.1 狙い

建築 (Architecture) とは、その空間としての機能 (Function)、美しさとしての形態 (Morphology)、素材としての材料 (Material)、強さとしての構造 (Structure) の理が保たれるように造られている構造物である。人体で例えば、カルシウムを主な材料として作られた骨格は全体の構造であり、人が立てられるように支えている。また、皮膚などは人の形態を表現する。さらに、臓器や循環器などは人としての機能を果たす。

建築業を含めた各業界において、分業化が進んでいる。名市大の建築都市デザイン学科にも、建築設計、構造・材料、環境・設備、都市・地域といった四つの分野に分けられている。しかし、良い建築を造るには、意匠・構造・環境など多分野の知識を総合的に駆使しなければならない。特に、日本は世界中でも有数な自然災害の大国であるため、建築物は日常生活や経済活動の拠点である一方、災害時に人命と財産を守るシェルターでもある。

構造力学¹(Structural Mechanics) とは、構造物を安全に設計するために、構造物に外力²が作用した場合、構造物の内部に、どれだけの力が生じるか、どのぐらいに変形するかを定量的に計算する専門科目である。この授業を通じて、基礎理論である構造力学を学ぶことにより、思い描いたデザインを実現するために必要最低限な能力を身につける。

1.1.2 位置づけ

構造力学は、建築の構造分野において、最初の専門科目である。他の構造系科目の内容は以下のように予定されている。

- (2年生前期・構造力学)
- 2年生後期・建築構造学：建築材料、構造形式 (Structrural System)、建築の構造設計 (Structural Design) などの一般的な話題
- 3年生前期・建築構造計画学：鉄骨構造と鉄筋コンクリート造の構造設計
- 3年生後期・構造設計法：荷重論、振動論、塑性論、構造設計法

¹ 建築以外、土木や機械などの分野でも構造力学が必修科目となるため、建築構造物を対象としたものは「建築構造力学」と呼ばれることもある。

² 地震、風、自重など、外部より建築にかかる力のこと。

1.1.3 内容

本講義の主な対象物は、トラス構造とラーメン構造である。どちらの構造形式も直線状の部材で構築される構造物である。トラス構造 (Truss) は、力学的効率がいため、大きなスパンを飛ばす空間構造や、(東京タワーなどの) 塔状構造物にもよく採用される。ただし、斜めな部材が大量に存在し、空間の利用率がいたため、住宅、オフィスビル、学校建築などの建物には、基本的にはラーメン構造 (Frame) が採用されている。従い、本講義では、線材で構築される建築構造に限定する。

本講義の内容としては、「力の釣合い」、「線材 (トラス、梁、ラーメン) の力学」、「エネルギー原理」、「断面の性質」、「変形」の五つを予定している。力の釣合い (Equilibrium of Forces) やエネルギー原理 (Principle of Energy) を理解し、荷重や強制変位に対して、トラス、梁、ラーメンなどの構造物がどのように変形し、どのような応力状態となるかを計算し、構造物の強度や剛性や安全性に関する性質を学ぶ。

また、構造の力学特性により、以下のように大きく2部に分けることもできる。

- 第1部では、力の釣合い方程式を解くことにより、建築構造にかかるすべての力を一意に求められる静定構造について学ぶ。
- 第2部では、力の釣合い方程式を加え、変位の適合条件も考慮しないとできない不静定構造について勉強する。

1.1.4 宿題

適宜に宿題を用意している。原則として各自で解答し、規定の時間までに事務室の「張メールボックス」に提出してください。

正当な理由なしで、遅れたものは、受け取らないとしている。

また、演習問題は、A4用紙を使用し、1枚目に学籍番号、氏名および提出日を明記してください。演習問題が複数ページになる場合には、左上をとめてください。

1.1.5 評価方法

最終成績の10%は宿題、40%は中間テスト、50%は期末試験の成績で総合的に評価する。

出席率は7割未満 (15回のうち5回以上欠席) の場合は、定期試験の試験資格はないことを注意してください。

また、原則的には、再試験を実施しない。

1.2 構造力学演習

本講義のセットとして、構造力学演習という科目がある。当日構造力学の授業内容に合わせて、演習問題を出し、90分の授業時間以内に解く。必修課目にもなっている。

構造力学演習の最終成績は、演習問題の完成度および提出状況によって評価する。

1.3 資料

1.3.1 講義ノート

本講義では、講義ノートを中心に説明する。講義ノートは下記のホームページよりダウンロードできる。(随時更新している。)

<http://zhang.AIStructure.net/lectures/mechanics2018>

また、本配布資料には誤字やミスや誤りなどがあつたら担当の張³まで知らせてください。

1.3.2 参考資料

ほかに以下のような参考書もできれば参考にしてください。

1. 大崎純⁴・本間俊雄：「例題で学ぶ建築構造力学〈1〉静定構造力学編」、コロナ社
2. 大崎純・本間俊雄：「例題で学ぶ建築構造力学〈2〉不静定構造力学編」、コロナ社
3. 中村恒善⁵編著：「建築構造力学図説・演習 I、II」、丸善
4. 鈴木基行⁶：「構造力学徹底演習」、森北出版
5. 大田和彦・藤井大地：「はじめて学ぶ建築構造力学」、森北出版
6. 武藤清・辻井清二・梅村魁・青山博之：「大学課程 建築構造力学」、オーム社
7. 谷資信・杉山英男：「建築構造力学演習」、オーム社
8. 山田孝一郎・松本芳紀：「建築構造力学 I、II」、森北出版
9. 伊藤実・新田亮：「よくわかる構造力学の整理と演習 静定構造編」、学隆社
10. 伊藤実・脇田嘉夫：「よくわかる構造力学の整理と演習 不静定構造編」、学隆社
11. 北後寿・加村隆志：「よくわかる応力の基本問題」、技報堂
12. 大石健次編著：「現代構造力学」、オーム社
13. 成岡昌夫ほか：「構造力学 I、II」、丸善
14. 和泉正哲：「建築構造力学 1、2」、培風館
15. 今川憲英・岡田章：「木による空間構造へのアプローチ」、建築技術
16. 日本建築学会：「構造入門教材 ちからとかたち」、日本建築学会

1.4 アドバイス

頑張りたい方に、知っているはずだが、以下の「コツ」がある。

- 温旧知新：講義ノートを事前にホームページにアップロードするので、授業前に自分で予習、授業後に復習に活用する。
- 学問：学習+質問とのこと。質問相手は、担当教員、TA、友人、だれでも良い。
- 練習：用意した宿題以外でも、例えば紹介した参考資料で練習する。
- 頭脳シミュレーション：数式が多いが、物理現象を数学的に取り扱っているため、数式の暗記よりも物理現象として頭の中でそのプロセスを再現する。

最後に、グローバル化が進んでいる今の時代に対して、専門言葉の英語表記はできる限り入れている。

³ Email: zhang@sda.nagoya-cu.ac.jp、研究室：管理棟 414 室・張研究室

⁴ 京都大学時代の恩師

⁵ 恩師の恩師

⁶ 東北大学時代の指導教官

Chapter 2 力の基本

Abstract この章には、力の三要素、力の分解・合成、力の釣合いについて説明する。

2.1 力の要素と力の表記

力というものは、人間の五感によって感じることはできない。しかし、リンゴは木から地面に落ちたり、風の日に木が揺れたりなど、人間の五感で感じられた物体状態の変化、例えば変位 (Displacement) または変形 (Deformation)¹ によって、力の存在および働きを推定できる。

2.1.1 力の三要素

力 (Force) を正確的に表すには、下記の三つの要素が必要である。

力の三要素

力を定義するには、力の作用点、力の方向、および力の大きさという三要素が必要である。

具体的には、

- 力の作用点：力は構造物のどこかに作用するかを表す。
例えば、風荷重は構造物の外平面に作用するのに対して、自重は構造物の全体に作用する。
- 力の方向：力はどの方向に作用するかを表す。
例えば、風荷重は水平方向の（外）力として考えられる一方、自重はいつも地球中心に向いているため鉛直方向の（外）力としている。
- 力の大きさ：力はどのぐらいの大ききさで作用する。
例えば、台風時と普通の日には、明らかに風による力の大ききさは異なる。

2.1.2 力の表記

力を表すには、幾何表記²と代数表記という二つの表記方法がある。例えば、図 2.1の矢印は力を表している：原点 O（または矢印の先端）は力の作用点、矢印の方向は力の方向、矢印の長さは力の大ききさを表す。

¹ 変位とは（点の）位置変化、変形とは物体の形状変化を表す。

² 示力図とも呼ばれる

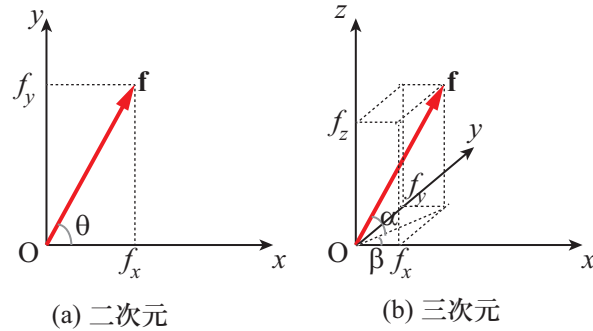


図 2.1 力の表記：幾何表記とベクトル表記

幾何表記の場合、力を直感的に理解しやすく、大昔から利用されていた。しかし、いまでは計算上ほとんど使わなくなったため、ここでは詳しく説明しないこととする。これ以降は、幾何表記は図形を用いた問題の定義のみに使用される。

問題を解くには、代数表記で説明するので代数表記（記号、数値またはベクトル）を理解してほしい。また、数値で力を表す場合に、正か負かの符号が付いているが、これは定められた座標系における正方向か負方向かを意味する³。

幾何表記の矢印は、代数表記のベクトル (Vector, 長さを持つ矢印)⁴で表現できる。 f_x , f_y と f_z はそれぞれ x -, y -と z -方向において力の大きさを表す。例えば、図 2.1 のような力をベクトルとして以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{二次元： } \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot \cos \theta \\ f \cdot \sin \theta \end{pmatrix} \\ \text{三次元： } \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot \cos \alpha \cos \beta \\ f \cdot \cos \alpha \sin \beta \\ f \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

基本的には、 x -, y -と z -軸の正方向を各分力の正方向とする。

力 \mathbf{f} の大きさ (ベクトルの長さ) f は

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \quad (2.2)$$

となる。

2.2 力の分解・合成

一つの (合) 力をいくつかの (分) 力に分解することを力の分解と呼ぶ。また、その逆プロセスとして、いくつかの (分) 力を一つの (合) 力に合併 (合成) することを力の合成と呼ぶ。力の分解と合成は、次の節で説明する力およびモーメントの釣合い方程式を立てるには必要である。

この節で取り扱うケースは、分力は共通の作用点に作用していることを前提とする。分力は異なる点に作用する場合は、次節で説明するパニオン定理が利用される。

³ 断面力である軸力およびせん断力を表すには、その符号が特別な意味をもつ。

⁴ 計算機は、行列やベクトルを取り扱うのに得意なので、数式をできるだけ行列式に整理したほうが計算機を活用しやすい。また、**bold** の記号は行列かベクトルを表す。普段、成分を縦方向に並べる列ベクトルを使う。

2.2.1 力の分解

力の分解というのは、一つの力を二つ以上の分力に分解することである。たとえば、式(2.1)の三次元バージョンは、以下のように三つの分力に分解することができる。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

これは、力（ベクトル）を式の右側にあるよう、三つの（直交座標系においての）各方向成分の和で分解できることを意味する。図2.1はその幾何表現を示している。実は、上記のように三つの方向で分解する以外も、分力は三次元空間において平行立方体、二次元空間において平行四辺形のルールを満足すれば、無限の組み合わせで分解できる。例えば、

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x \\ 0 \\ f_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

などのように、二つの力に分解することも可能である。

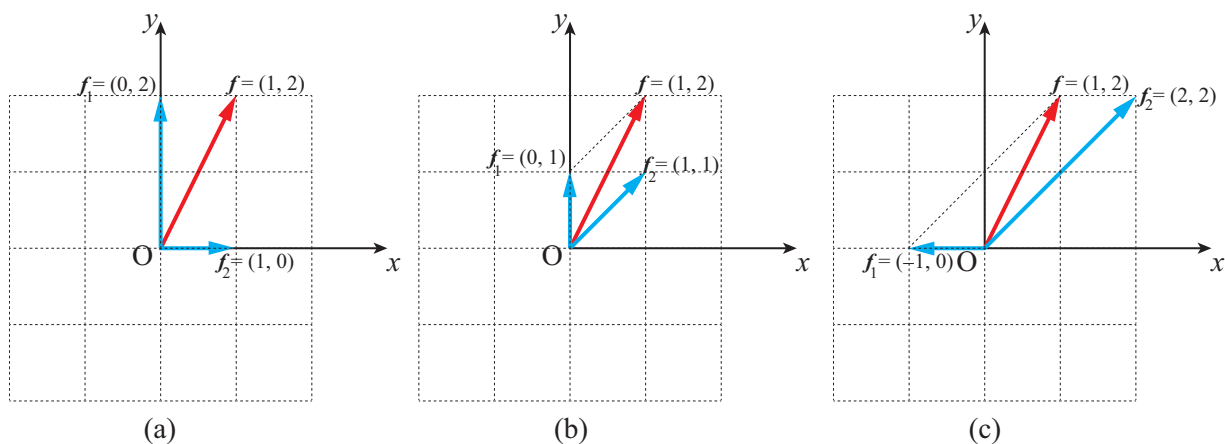


図 2.2 二次元空間において力の分解例2.1。

例 2.1. 図2.2にある力 \mathbf{f} を二つの分力に分解する例を示してください。

図2.2の二次元空間においての力 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して、その分解を考えてみる。表示しやすいように、図では成分を横方向に並べる行ベクトル $\mathbf{f} = (1, 2)$ で描いている。

図2.2(a)に示すように、力 \mathbf{f} をそれぞれ直交座標系 x -方向および y -方向に分解すると、以下のようなになる。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \quad (2.5)$$

または、図2.2(b)-(c)のように任意座標系に分解し、それに対応するベクトル形式の分解は以下のようなになる。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

以上のように、力（ベクトル）は分力により構成される平行四辺形の対角線にある。それ以外の分解は、無限の可能性がある。

実際の構造計算では、各方向の釣合い方程式を立てるには、直交座標系に分解することが多い。しかし、場合（特にトラス構造）によって計算上の便宜を図るため、ほかの座標系に分解することもあり得る。

2.2.2 力の合成

力の合成は、力の分解の逆過程であり、いくつかの力を一つの（合）力に変換することである。幾何表記の場合には、同じく三次元空間において平行立方体、二次元空間においては平行四辺形を用いて力を合成する。

代数表記の場合には、各力の座標系各方向における n 個の分力 $f_{ix}, f_{iy}, f_{iz} (i=1, 2, \dots, n)$ とする。その各方向の総和を f_x, f_y, f_z とすると、合力 \mathbf{f} を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{f}_n = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{1x} + f_{2x} + \dots + f_{nx} \\ f_{1y} + f_{2y} + \dots + f_{ny} \\ f_{1z} + f_{2z} + \dots + f_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_{ix} \\ \sum_{i=1}^n f_{iy} \\ \sum_{i=1}^n f_{iz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_x &= \sum_{i=1}^n f_{ix} \\ f_y &= \sum_{i=1}^n f_{iy} \\ f_z &= \sum_{i=1}^n f_{iz} \end{aligned} \quad (2.8)$$

また、その方向を各軸の正方向との角度として定義すると、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \theta_x &= \arccos \frac{f_x}{f} \\ \theta_y &= \arccos \frac{f_y}{f} \\ \theta_z &= \arccos \frac{f_z}{f} \end{aligned} \quad (2.9)$$

例 2.2. 図2.2(a) に示す二つの力 \mathbf{f}_1 と \mathbf{f}_2 を一つの力 \mathbf{f} に合成してください。

図2.2(a) に示す二つ ($n=2$) の分力 \mathbf{f}_1 と \mathbf{f}_2 の合成を考える。

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

その合力は、以下のように求められる。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

力 \mathbf{f} の大きさは

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad (2.12)$$

であり、各軸の正方向との角度は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \theta_x &= \arccos \frac{f_x}{f} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \theta_y &= \arccos \frac{f_y}{f} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3 力の釣合い

ある物体に作用するすべての力 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ を合力 \mathbf{f} に合成すると、その運動はニュートンの運動方程式より記述できる：

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = \mathbf{M}\mathbf{a} \quad (2.14)$$

ここで、 \mathbf{M} は質量行列 (Mass Matrix)、 \mathbf{a} は加速度ベクトル (Acceleration Vector) である。この運動方程式は、高校や中学校で習っていた

$$f = ma \quad (2.15)$$

の行列バージョンだと考えて良い。

合力は変わらない (constant) と仮定すれば、物体は常に一定の加速度 \mathbf{a} のままで運動を続ける。加速度とは、速度の変化率であるため、時刻 t における物体の運動速度 \mathbf{v}_t は

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (2.16)$$

となる。ここで、 \mathbf{v}_0 は時刻 $t=0$ における初期速度である。

さらに計算すると、時刻 t における物体の変位 (移動した距離) \mathbf{d}_t は、

$$\mathbf{d}_t = \frac{\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_0}{2}t = \mathbf{v}_0t + \frac{\mathbf{a}}{2}t^2 \quad (2.17)$$

となる。

任意の建物、例えばこの芸工の管理棟、を考えてみよう。管理棟は、地面に固定されている。数学的に表現すると、地面に対しては、管理棟の変位は任意時刻 t においてもゼロであり、すなわち、

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{v}_0t + \frac{\mathbf{a}}{2}t^2 = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

が分かる。最初の時刻 $t=0$ においては、構造物の地面に対する運動速度 \mathbf{v}_0 もゼロとなるので、結局、加速度は

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

でなければならない。これは、地面に固定されている建物は、いつでもその加速度がゼロとなることを意味する。また、建物の地面に対する相対速度 (式 (2.16)) がゼロであるという条件からも同様の結論が得られる。

従って、構造物に作用している合力 \mathbf{f} と加速度 \mathbf{a} の関係式 (2.14) から、 \mathbf{f} は常にゼロとなることが分かる。これは、力の釣合い (Equilibrium of Forces) と呼ばれる。

力の釣合い条件

構造物に作用しているすべての力の総和はゼロとなることは、いつも成立する。すなわち、

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

ここの「すべての力」というのは、後で出てくる外力、反力および断面力などいわゆる構造物に作用している力を意味する。また、式(2.20)の力の釣合い条件は、これ以降の外力を受けて、構造物の支持点に生じる反力、および内部に生じる断面力を計算する際に中心の役割を果たしている。

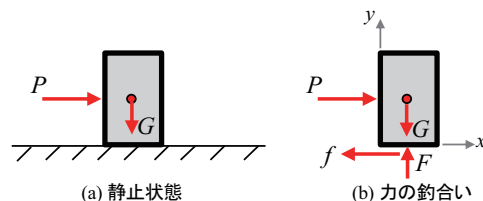


図 2.3 力の釣合いの例2.3

例 2.3. 図 2.3(a) の静止中の箱に対して、力の釣合いにより地面の摩擦力 f と地面の支持力 F を求めてください。

図 2.3(a) に示すように、ある長方形の箱が地面に置かれている。この箱には、水平方向の外力 P と鉛直方向の自重 G がかかっている。しかし、この箱は静止状態を保っている。すなわち、その速度も加速度もゼロである ($v=0, a=0$)。

箱は地面に置かれているため、地面と直交（鉛直方向）する地面からの支持力 F 、および地面よりそれと並行（水平方向）するの摩擦力 f が存在する⁵。

物体にかかっているすべての力 (P, G, f, F) を図 2.3(b) に表す。力の釣合いより、 x -と y -方向の合力 $\sum X$ と $\sum Y$ はそれぞれゼロとなるので、

$$\begin{aligned} \sum X &= P - f = 0, \\ \sum Y &= -G + F = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

が得られる。したがって、各力の間には以下の関係式が明らかである。

$$\begin{aligned} f &= P \\ F &= G \end{aligned} \quad (2.22)$$

ここで、注意してほしいのは、あくまでも静止状態の箱を検討している。実際には、地面の支持力および箱と地面の間の摩擦係数で決められた摩擦力の限界値 f_{\max} がある。水平力 P がこの限界値以下であれば、箱が静止状態を保たれる。 P がこの限界値を超えると、加速運動が生じる。

2.4 モーメントおよびその釣合い

力は、ある物体を並進 (Translation) させるように働いているのに対して、モーメント (Moment) は、ある物体をある点 (回転中心) まわり回転 (Rotation) させるように働いている。

⁵ 摩擦力 f の最大値は、地面による支持力 F と摩擦係数 μ の積である。要するに、 $f \leq F\mu$ が成り立つ。支持力 F の位置は、厳密には適切ではない。例 2.5 を参考してください。

2.4.1 モーメント

モーメントの定義

モーメントは、力と回転中心から力までの垂直距離の積である。

普通の座標系においては、時計回りを正とし、反時計回りを負とする⁶。

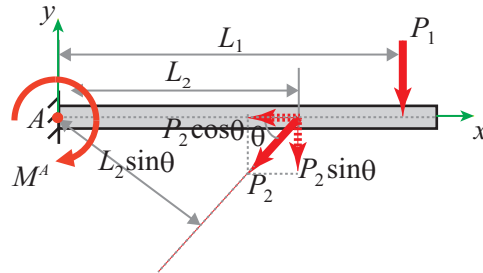


図 2.4 片持ち梁を用いたモーメントの計算例

例 2.4. 図2.4に示す片持ち梁において、外力 P_1 と P_2 による固定端 A 点まわりのモーメントを求めてください。

図2.4では、一端固定（並進も回転もできない）、一端は自由（並進も回転も可能）である片持ち梁 (Cantilever) を示している。この持ち梁を例として、モーメントの計算方法を説明する。A 点と外力 P_1 の垂直距離は L_1 なので、A 点回りの外力 P_1 によるモーメントは

$$M_{A1} = P_1 L_1 \quad (2.23)$$

となる。

同様に、外力 P_2 による点 A 点まわりのモーメントは

$$\begin{aligned} M_{A2} &= P_2 (L_2 \sin \theta) \\ &= (P_2 \cos \theta) \cdot 0 + (P_2 \sin \theta) \cdot L_2 \\ &= P_2 L_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる。ここで、点 A と外力 P_2 の距離 $L_2 \sin \theta$ かける外力で計算するか、外力をそれぞれ水平方向と垂直方向に分解し、そのモーメントの総和として計算するという二通りの方法がある。どっちの方法を使っても、最終的に同じ結果が得られる。

したがって、外力 P_1 と P_2 による点 A 点まわりのモーメントは

$$\begin{aligned} M_A &= M_{A1} + M_{A2} \\ &= P_1 L_1 + P_2 L_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。

2.4.2 モーメントの釣合い

ある（任意）点まわりのモーメントの総和は、

⁶ この符号の定義は強制ではない。すなわち、反時計回りを正方向としても間違いではない。

$$M_{\text{ある点まわり}} = \sum_{i=1}^n M_i \quad (2.26)$$

と書ける。ニュートンの運動の第2法則を適用すれば、それに伴う（回転）運動方程式は

$$M_{\text{ある点まわり}} = I\ddot{\theta} \quad (2.27)$$

となる。ここで、 I は慣性モーメント、 $\ddot{\theta}$ は角加速度である。物体（建物）は、地面に対して運動が生じない限り、角加速度はゼロである。従って、モーメントの総和もゼロとなり、モーメントの釣合いが成り立つ。

モーメントの釣合い条件

建物に作用している任意点回りのモーメントの総和 M^7 はゼロとなる。

$$M_{\text{ある点まわり}} = 0 \quad (2.28)$$

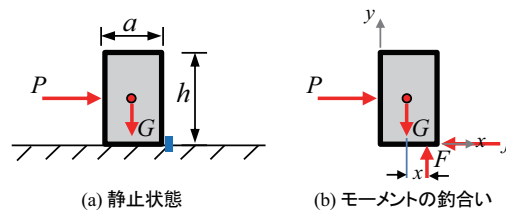


図 2.5 モーメントの釣合いの例2.5

例 2.5. 図 2.5に示す物体が転倒しない条件を示してください。

図 2.5(a) に示すような外力 P をうける物体を考える。例 2.3 と異なって、ここでは摩擦力を無視し、物体の右側にバリアとしてもう一つの子物体を置いている。

この物体が静止状態にあるため、力の釣合いは満足され、それにかかっているすべての力を図 2.5(b) に示す。ここで、 f は小物体によるその運動を防ぐための反力、 x ($0 \leq x \leq a/2$) は地面による支持力が物体の中心からの距離である。例 2.3 と同様に、力の釣合い方程式によっては、

$$\begin{aligned} f &= P \\ F &= G \end{aligned} \quad (2.29)$$

が分かる。

物体が静止状態にあるのは、回転がしないことも意味するため、モーメントの釣合いも成り立つ。したがって、例えば物体の中心まわりのモーメントの総和はゼロとなり、支持力 F の作用点が中心からの距離 x は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} M &= P \cdot 0 + G \cdot 0 - F \cdot x + f \frac{h}{2} = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{fh}{2F} = \frac{Ph}{2G} \left(\leq \frac{a}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

上式より、支持力の作用点および外力の大きさに関しては、以下の結論がある。

⁷ 二次元のケースしか考慮していないため、スカラーのモーメント記号 M を使っている。質量の記号と誤解しないように。

- 外力がないとき ($P = 0$)、支持力 F は物体の中心を通る ($x = 0$)。
- 支持力 F は物体の右端にあるとき ($x = a/2$)、外力が最大 P_{\max} となる

$$P_{\max} = \frac{Ga}{h}, \quad (x = \frac{a}{2}) \quad (2.31)$$

- 外力 P が P_{\max} もより大きい場合、物体が転倒する。

2.4.3 パリニオンの定理

前節では、異なる分力は共通の（作用）点にかかっている場合に合力の計算方法を説明したが、現実的には、図2.4のように、異なる作用点にかかるケースが多い。これらの異なる作用点にかかる分力を一つの合力に合成するために、合力の大きさおよび方向は前節と同じように計算されるが、作用点を特定するには、パリニオンの定理が使われる。

パリニオンの定理 (Varignon's Theorem)

任意の支点（回転中心）に対するすべての（分）力によるモーメントの総和は、それらの力の合力によるモーメントと一致する。

要するに、力の合成前後のモーメントは変わらない。この定理を使うと、多数の（分）力の合力の位置を特定できる。

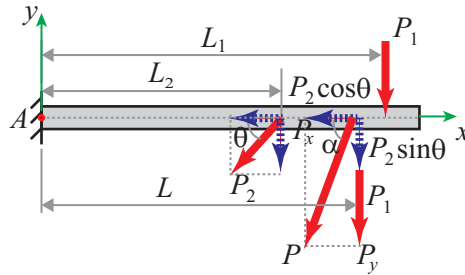


図 2.6 パリニオンの定理を用いた合力の計算例

例 2.6. パリニオンの定理により図2.6に示す片持ち梁に作用する合力を求めてください。

図2.6にある外力 P_1 と P_2 の合力 P を求める際に、その大きさおよび方向 (x -軸との角度) の具体的な計算はここで省略するが、以下のように計算できる。

$$P_x = P_{1x} + P_{2x} = (-P_1 \cos \frac{\pi}{2}) + (-P_2 \cos \theta) = -P_2 \cos \theta$$

$$P_y = P_{1y} + P_{2y} = (-P_1 \sin \frac{\pi}{2}) + (-P_2 \sin \theta) = -P_1 - P_2 \sin \theta$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad (2.32)$$

$$\pi + \alpha = \arccos \frac{P_x}{P} \quad (x\text{軸の正方向との角度}) \quad (2.33)$$

パリニオンの定理によると、力の合成前後の（点Aまわりの）モーメントが変わらないため

$$P_x \cdot 0 + (-P_y L) = -P_y L = M_1^A + M_2^A = P_1 L_1 + P_2 L_2 \sin \theta \quad (2.34)$$

が分かり、合力 P の点 A までの距離 L は

$$L = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 \sin \theta}{-P_y} = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 \sin \theta}{P_1 + P_2 \sin \theta} \quad (2.35)$$

となる。

2.4.4 偶力

偶力（ぐうりよく）とは、以下のような性質を持つ力のペア（二つ）である。

偶力の性質

- 作用線が平行
- 互いに大きさが等しい
- 方向が反対

したがって、偶力が働くと物体の回転運動をさせるが、並進運動をさせる効果はない。

実は、例 2.5 中の P と f 、および G と F は偶力である。また、任意のモーメントが偶力に変換ことができる。

2.5 （国際）単位（系）(International System of Units)

単位系は、インチ (inch) ・ポンド (pound) のようなイギリス式などいろいろあるが、世界中通用するのは、メートル (meter) ・キログラム (kg, kilogram) のような国際単位系 (SI Units) である。

長さや距離で言えば、ミリ (センチ) mm やセンチ cm やメートル m やキログラム (メートル) km などがある。重さや質量で言えば、グラム g やキログラム (グラム) kg やトン ton などがある。基本単位は時間 (s)、長さ (m)、質量 (kg)、電流 (A)、熱力学温度 (K)、物質質量 (mol)、光度 (cd) である。

力の単位は、ニュートン N (Newton の略) またはその千倍のキログラムニュートン kN で表す。地球表面にある 1kg のものは、地球から 9.8N ぐらいの (引) 力がかかっている。これは、ニュートンの運動方程式 $f = ma$ の中で、地球表面において物体の自由落下加速度 $a = g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$ の由来である。

モーメントは力と距離の積であるため、その単位は N·m や kN·m で表す。

後で出てくる単位面積あたりの力の大きさを表す応力 (stress) の単位は、Pa (=N/m²) や MPa (1N/mm² = 10⁶ N/m² = 10⁶ Pa) である。

構造力学でよく使われている国際単位を表 2.5 でまとめている。

例 2.7. 重さ (質量) 1ton の自動車を吊り上げるために、鉄棒の必要断面を求めてください。

鉄の引張 (破断) 強度 σ_u は 400MPa ぐらいある。というのは、1 平方 mm (mm²) の鉄は、400N (質量 40kg 相当) の力を負担できる。もっと具体的にいえば、1 ton (重量 10,000N 相当) の車を吊あげるのに、

$$P = A\sigma_u = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_u$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{4P}{\pi\sigma_u}} = \sqrt{\frac{4 \times 10000}{3.14 \times 400}} \simeq 11.3(\text{mm}) \quad (2.36)$$

⁸ 弾性係数は、ヤング係数 (Young's Modulus) とも呼ばれる。

表 2.1 構造力学に使われる国際単位

| | 単位 |
|-------------------|--|
| 長さ | m, cm ($= 10^{-2}$ m), mm ($= 10^{-3}$ m) |
| 角度 | rad, $360^\circ = 2\pi$ rad ≈ 6.28 rad |
| 時間 | s |
| 質量 | kg, ton ($= 10^3$ kg), g ($= 10^{-3}$ kg) |
| 加速度 | m/s^2 |
| 密度 | kg/m^3 |
| モーメント | $\text{N}\cdot\text{m}$ |
| 面積 | m^2 |
| 力 | N ($= \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$) |
| 応力 | N/m^2 , Pa ($= \text{N/m}^2$), Mpa ($= \text{N/mm}^2 = 10^6$ Pa), GPa ($= \text{kN/m}^2 = 10^9$ Pa) |
| 断面 2 次モーメント | m^4 |
| 弾性係数 ⁸ | N/m^2 , N/mm^2 , kN/m^2 |

ここで、 P は自動車の重量、 A は鉄棒の断面積、 d は鉄棒断面の直径である。上記の計算によると、鉄棒の直径 d は 11.3mm だけで重さ 1ton の自動車を吊り上げることが可能⁹である。

2.6 宿題

Exercise 2.1. 図2.7の単純梁に二つの外力 P が作用している。この外力の合力を求めてください。

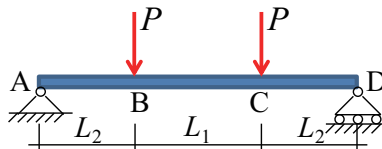


図 2.7 宿題2.1

⁹ 実際には、鉄の破断に至る前に、「降伏」という段階もある。

Chapter 3

建物のモデル化および性質

Abstract この章には、建物の内部に働いている（断面）力、支点の反力および変形を求めるために、実際の建物を近似的にモデル化する方法、さらにその基本性質について説明する。

3.1 外力のモデル化

外部環境による生じる外力（External Load）は、「荷重」または「外力荷重」とも呼ばれる。台風や地震や雪など、場合によって構造物には多種類の外力が作用している。これらの外力はそれぞれ特性をもち、異なる基準によって何種類に分類できる。例えば、

- 作用面積によって、外力荷重は**集中荷重**と**分布荷重**に分類できる。
集中荷重 (Concentrated Load) とは、床に対して人間の自重など力の作用点・面が力を受ける面積より十分に小さいとき、外力を集中荷重として近似する。
分布荷重 (Distributed Load) とは、屋根に対して雪の自重など力の作用面が力を受ける面積と同じくらいになるとき、外力を分布荷重で表現する。
- 方向によっては、外力荷重は**水平荷重**と**鉛直荷重**に分類できる。
水平荷重 (Horizontal Load) とは、風および地震などのような水平方向にかかる外力を指す。
鉛直荷重 (Vertical Load) とは、構造物の自重などのような鉛直方向にかかる外力を指す。
- 継続時間によっては、外力荷重は**長期荷重**と**短期荷重**に分類できる。
長期荷重 (Long-term Load) とは、構造物の自重などのような長期にわたってかかる外力を指す。
短期荷重 (Short-term Load) とは、風および地震などのような一時的にかかる外力を指す。
- 時刻変化によっては、外力荷重は**静的荷重**と**動的荷重**に分類できる。
静的荷重 (Static Load) とは、いつでも同じ大きさ・方向・作用点にかかる外力を指す。
動的荷重 (Dynamic Load) とは、地震などのような時刻によって大きさ・方向・作用点に変化する外力を指す。

などのように分類できる。一つの外力は、いくつかの性質をもっていることに注意したい。例えば、建物の自重は鉛直荷重・長期荷重・静的荷重である。また、建物のパーツである梁の荷重は分布荷重とされることは一般的である。

さらに、長期・短期荷重は実際の構造設計に**安全係数**という形で考慮されることが多い。また動的荷重による構造物の挙動を計算するには**時刻歴解析 (Time History Analysis)**を行う必要がある。構造力学には、これらの構造計算の基礎となるが、荷重の時間変化を考慮しないとする。すなわち、静的荷重に限定する。

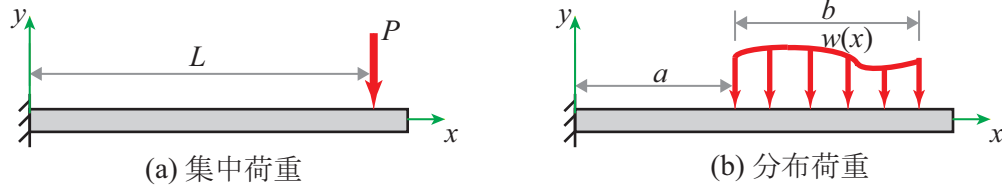


図 3.1 集中荷重および分布荷重の図示

3.1.1 集中荷重と分布荷重

- 集中荷重とは、外力の作用面積が十分小さい時、近似的に一つの点に集中するとされる外力荷重である。
- 集中荷重と比較して、分布荷重は、一定面積内に作用する外力荷重である。

例えば、人が床の上に立つ場合、床の面積の割に、人間の脚の面積が非常に小さいので、床に対して人間の自重による外力は集中荷重と考えてよい。

または、雪は屋根の上に積もっている時、雪の自重による外力荷重は一つの点に集中とすることができないため、分布荷重として取り扱うことが一般的である。

図3.1は、2次元においての集中荷重および分布荷重の一般的な図示である。集中荷重の単位は、力と同じであるため、N または kN で表す。分布荷重は単位長さまたは単位面積あたりの力なので、その単位はそれぞれ N/m と N/m² で表す。

3.1.2 分布荷重の種類と数学的定義

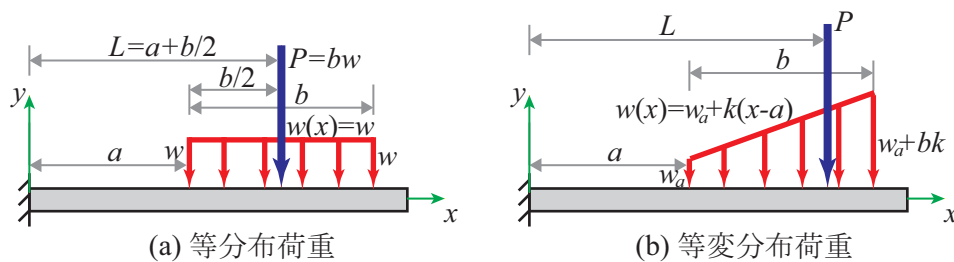


図 3.2 等分布荷重と等変分布荷重

分布荷重には、荷重の分布によっていろいろと分類できるが、以下の二つのケースは最もよく使われている。

- 等分布荷重：図3.2(a)に示すように、分布荷重の大きさはどこでも同じである。数学的には、

$$w(x) = w \quad (3.1)$$

で表す。ここで、 L, a, b は荷重の位置および作用範囲、 $P, w(x)$ は荷重の大きさを表す。また、 $w(x)$ は、分布荷重の大きさは x の関数であることを意味する。等分布荷重の場合には、 w は不変 (constant) の数値である。

- 等変分布荷重：図3.2(b)に示した台形のように、分布荷重の大きさの変化は一定である。数学的には、

$$w(x) = w_a + k(x - a) \quad (3.2)$$

で表すことができる。ここで、 w_a は $x = a$ のところの分布荷重の大きさ、 k は一定の勾配である。

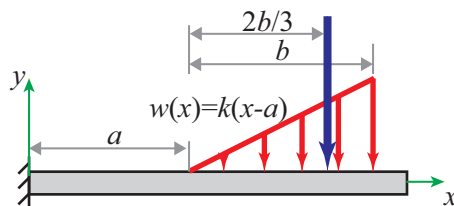


図 3.3 三角形の分布荷重

等変分布荷重に対して、 $w_a = 0$ の場合には、図3.3に示すように、分布荷重の形状は三角形になる。

3.1.3 分布荷重から集中荷重への変換

分布荷重はある範囲内で作用しているため、計算は集中荷重よりややこしくなる。したがって、実際の構造力学計算においては、分布荷重を集中荷重に変換することが多い。この場合には、前章で説明したパニニオンの定理が適用される。

分布荷重より変換された集中荷重の大きさ P は

$$P = \int_a^{a+b} w(x) dx \quad (3.3)$$

となり、変換された集中荷重の作用点の位置はパニニオンの定理におけるモーメント一致によって、

$$\begin{aligned} PL &= \int_a^{a+b} w(x) \cdot x dx \\ \Rightarrow L &= \frac{\int_a^{a+b} w(x) \cdot x dx}{P} = \frac{\int_a^{a+b} w(x) \cdot x dx}{\int_a^{a+b} w(x) dx} \end{aligned} \quad (3.4)$$

で計算することができる。

例 3.1. 図3.2(a)に示す（直角四辺形）等分布荷重を集中荷重に変換する。

図3.2(a)の等分布荷重の場合、変換された集中荷重の大きさは

$$\begin{aligned} P &= \int_a^{a+b} w(x) dx = \int_a^{a+b} w dx = wx \Big|_a^{a+b} \\ &= bw \end{aligned} \quad (3.5)$$

であり、その位置は

$$L = \frac{\int_a^{a+b} (w dx) \cdot x}{P} = \frac{wx^2/2 \Big|_a^{a+b}}{bw} = \frac{w[(a+b)^2 - a^2]/2}{bw}$$

$$= a + \frac{b}{2} \quad (3.6)$$

となる。明らかに、変換された集中荷重の大きさは、等分布荷重でなす直角四辺形の面積となり、その位置は直角四辺形の中心（図心）となる。これはたまたまではなく、任意形状の分布荷重に対しても適用できる。理由は、その大きさおよび位置の計算は、後で出てくる図心の計算式と同じである。

三角形等変分布荷重は台形等変分布荷重の特殊の場合であり、その計算は以下の例題で説明する。

例 3.2. 図3.3に示す三角形等変分布荷重を集中荷重に変換する。

図3.3に示すような三角形の等変分布荷重の大きさは、

$$P = \int_a^{a+b} w(x) dx = \int_a^{a+b} k(x-a) dx = \left[\frac{kx^2}{2} - ax \right]_a^{a+b}$$

$$= \frac{kb^2}{2} \quad (3.7)$$

となり、等変分布荷重の三角形の面積と一致していることがわかる。また、等価の集中荷重の作用点は

$$L = \frac{\int_a^{a+b} [k(x-a)] dx \cdot x}{P} = \frac{\int_0^b (k\bar{x}) d\bar{x} \cdot (\bar{x}+a)}{P} = \frac{\left[\frac{k\bar{x}^3}{3} + \frac{kax^2}{2} \right]_0^b}{kb^2/2}$$

$$= a + \frac{2}{3}b \quad (3.8)$$

となり、等変分布荷重の三角形の中心と一致している。ここで、積分の計算を簡単にするため、 $\bar{x} = x - a$ および $x = \bar{x} + a$ とした。

前に説明したパリニオン定理により、台形等変分布荷重を集中荷重に変換するには、以下の例題で説明する。

例 3.3. 図3.2(b) に示す台形等変分布荷重を集中荷重に変換する。

図3.2(b) に示すような台形の等変分布荷重の場合も等分布荷重と同じように計算できる。変換された集中荷重の大きさは

$$P = \int_a^{a+b} w(x) dx = \int_a^{a+b} w_a + k(x-a) dx = \left[w_ax + \frac{kx^2}{2} - ax \right]_a^{a+b} = bw_a + \frac{kb^2}{2} \quad (3.9)$$

となり、台形の面積

$$A = [w_a + (w_a + kb)] \cdot b/2$$

$$= bw_a + \frac{kb^2}{2} \quad (3.10)$$

に一致する。

また、変換された集中荷重の位置も等分布荷重のように計算できる：

$$L = \frac{\int_a^{a+b} [w_a + k(x-a)] dx \cdot x}{P} = \frac{\int_a^{a+b} w_a \cdot x dx + \int_a^{a+b} kx(x-a) dx}{P} \quad (3.11)$$

■ 残りの計算はややこしいので、ここでは省略する。しかし、この式に関する考察が重要である。

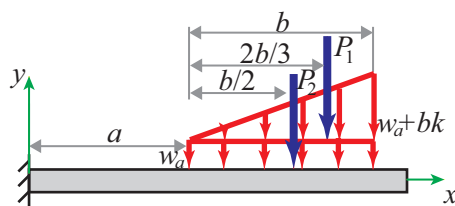


図 3.4 台形等変分布荷重を基本図形の直角四辺形および三角形分布荷重に分解する。

例 3.2にある三角形等変分布荷重、例 3.1になる直角四辺形等分布荷重、および例 3.3にある台形等変分布荷重を比較すれば、以下のことが分かる。

- 台形等変分布荷重の大きさは、直角四辺形等分布荷重および三角形等変分布荷重の和である。
- 台形等変分布荷重の（ある点回りの）モーメントは、それぞれ直角四辺形等分布荷重および三角形等変分布荷重によるモーメントの和である。

したがって、台形をパリエオン定理をそのまま適用するよりも、図 3.4に示すように、大きさおよび作用点を簡単に計算できる基本図形（四角形および三角形）に分解する。各基本図形の大きさおよびそれによるモーメントの和で計算すれば良いため、計算上非常に解きやすくなる。たとえば、以下の例題で考えてみる。

例 3.4. 基本図形分解により台形等変分布荷重を集中荷重に変換する。

等変分布荷重においては、直角四辺形および三角形が基本図形となるため、それらが変換された集中荷重の大きさおよび位置を覚えてほしい。実際には、図3.2(b)の台形等変分布荷重は図3.3(b)に示すように、上の三角形および下の直角四辺形に変換し、二つの集中荷重に変換したほうが計算は簡単になる。この場合に

$$\begin{aligned} \text{三角形:} & \quad P_1 = \frac{kb^2}{2}; \quad L_1 = a + \frac{2}{3}b \\ \text{直角四辺形:} & \quad P_2 = w_a b; \quad L_2 = a + \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

そして、台形等変分布荷重の総和は

$$P = P_1 + P_2 = w_a b + \frac{kb^2}{2} \quad (3.13)$$

である。これは、例 3.3 の計算結果と一致していることも確認できる。

作用点の計算結果がややこしいので、ここでその計算方法のみを説明する。 P_1 と P_2 による固定端まわりのモーメントの総和と、合力 $P = (P_1 + P_2)$ によるモーメント固定端まわりのが同じなるため、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)L &= P_1 L_1 + P_2 L_2 \\ \implies L &= \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{P_1 + P_2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

P_1 と P_2 の値をそれぞれ代入すると、合力 P の作用点 (固定端までの距離 L) を求めることができる。

3.2 建物のモデル化

実際の建物には、たくさんの部材があり、内外装材もありますので、計算技術がいくら進んでいても、構造物を丸ごとモデル化することは難しい。したがって、一定の精度を保証しながら、簡単に計算できるように、建物を工学的に近似モデルを構築する必要がある。

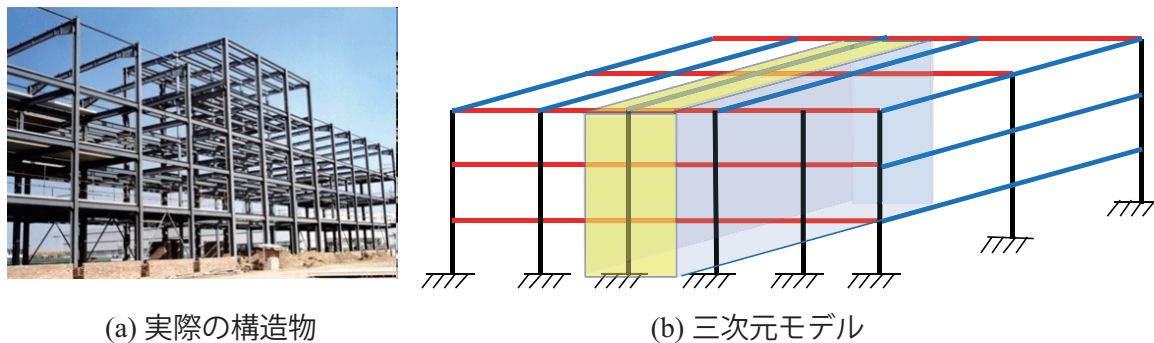


図 3.5 ラーメン構造の三次元モデル化

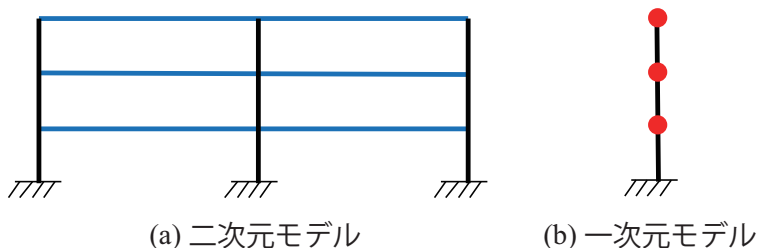


図 3.6 構造物の二次元・一次元モデル化

例えば、図3.5(a)にあるビル型建物は鉛直方向の線材である柱、水平方向の線材である梁および水平方向の面材である床で構成される。鉛直方向の面材である壁は外力を負担しない場合に、計算上無視されるが、外力を負担する耐震壁などが計算上無視できないケースもある。

外力を負担しない部材をすべて無視すれば、図3.5(a)の実建物に対しては、図3.5(b)のような三次元モデルとして構造計算を行うことができる。さらに、床の平面内剛性が高く（変形しにくく）、対称な建物の場合にねじれ変形が少ないため、三次元の構造物はそれぞれ梁間方向、桁行き方向¹に図3.6(a)に示すように二次元の代表的スパンを用いて近似することができる。動的構造計算においては、各階の質量を一つの質点に集中して、図3.6(b)のような一次元の3質点系に置換されることもある²。

図3.7には、橋梁などによく使われるトラス構造のモデル化、図3.8には、アーチ構造のモデル化を示している。

しかし、膜構造やドームなどの構造物のように、外力に対して三次元的に働いているため、二次元的に近似することができない場合もある。

¹ 桁行（けたゆき）は、一般的には建物の長手（ながて）方向、梁間（はりま）は、建物の短手（みじかて）方向をいう。

² 特に、コンピュータによる構造計算がそれほど進んでいなかった時代に、1次元の質点系モデルで動的解析を行っていた。今でもよく使われている。

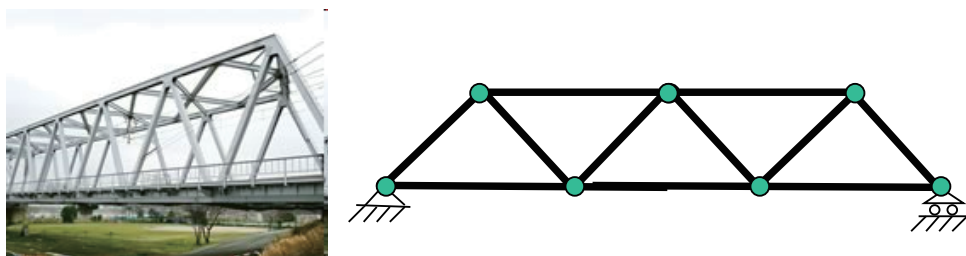


図 3.7 トラス構造のモデル化

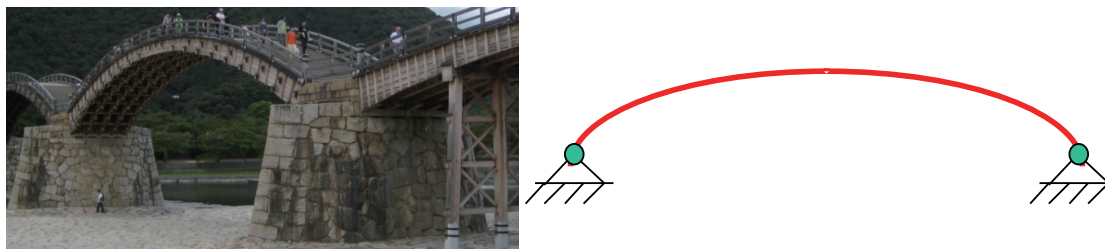


図 3.8 アーチ構造のモデル化

3.2.1 部材と接合部

構造物の構造要素（外力を負担する部分、部材とも呼ぶ）は、基本的には線적要素、または面的要素に分けられる。線적要素には、さらに図3.5(b)と図3.7に示すような直線状な要素、および図3.8に示すような曲線状な要素がある。構造力学には、曲線状な構造要素のあるアーチ構造についてもその構造特性を軽く説明する以外、基本的には直線状な部材で構築される建物に限定する。

また、膜構造やシェル構造などの構造物の構造要素は、面的であるため、線的に近似できない場合もある。

線적部材を有する構造物の場合に、異なる部材を繋ぐ部分は接合部 (Joint) と呼ばれる。接合部は、部材間に自由に回転できるかによっては、剛接合 (Rigid Joint) とピン接合 (Pin Joint) に分けられる。

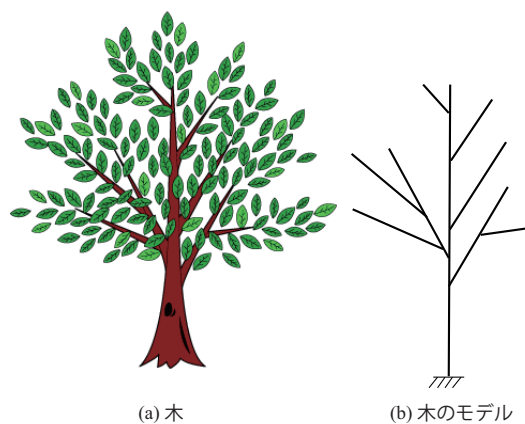


図 3.9 木とそのモデル化：木の分岐は自由に回転できないため剛接合となる。

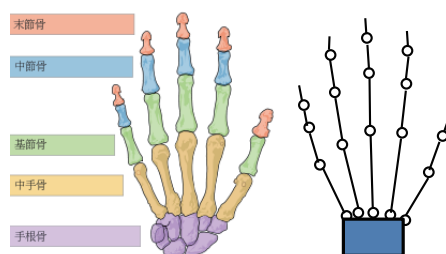


図 3.10 指の骨とそのモデル化：関節は自由に回転できるため、ピン接合となる。

- 剛接合の場合に、建物は外力の作用により変形するが、異なる部材間の角度が変形前後も変わらない。部材間の回転を拘束し、その角度を維持するように、(曲げ)モーメントが働いている。
- ピン接合の場合に、異なる部材間の角度(回転)は自由にえられる。部材間の回転が拘束されず、その角度を維持できないため、ピン接合部における曲げモーメントがゼロである。ピン接合は円(o)で表す。

植物には、剛接合部が多くみられる。例えば、図3.9に示すように、木の分岐などがある。

また、動物の関節はほとんどピン接合部である。例えば、図3.10に示すように、指の節、または骨の間などがある。

直線状な部材を有する構造物には、その接合部はピンであるか剛であるかによってはそれぞれトラス (Truss) 構造とラーメン³(Frame) 構造に分類ができる。この二種類の構造物は構造力学の主な対象となる。

- トラス構造 (図3.7) のすべての部材はピン接合部でつながっている。したがって、第4章に詳しく説明するが、外力を受けたとき、トラス構造の部材には軸力しか存在しない。
- ラーメン構造 (図3.5) の部材が剛接合部でつながっている。第5章以降に詳しく説明するが、外力を受けたとき、梁およびラーメン構造の部材には軸力、せん断力および曲げモーメントが生じる。

3.2.2 支点と反力

構造物を支えるところは支点 (Support) または支持点と呼ばれる。構造物の形状は変わらないままの並進 (Translation) または回転 (Rotation) は剛体変位 (Rigid-body Motion) と呼ばれる。図3.11では、二次元空間における三つの剛体変位を示している。それぞれは各方向の併進およびある点周りの回転である。建物の変形を無視し、剛体とみなすとき、支点の拘束 (Constraint) によって剛体変位が生じないようにしないと建物としては成り立たない。ここで、拘束とは運動をさせないことである。

また、建物の運動を拘束するために、支点より建物に力は働いている。外力による建物の(加速)運動を防ぐ(拘束する)ため、基本的には外力と反対の方向に働いているため、この力は支点反力 (Reaction Force) と呼ばれる。

構造力学には、固定支点、ピン支点およびローラー支点が最もよく使われている。その実物の写真は図3.12に示している。また、これらの支点のモデル化およびそれらに対応している反力は

³ 日本語の「ラーメン」は、ドイツ語の Rahmen から由来し、英語の Frame (フレーム)、および漢字の骨組みとは同じ意味をもつ。ラーメン構造は、近代建築における最も一般的な構造形式であり、事務所ビルや中層集合住宅などには柱間を 6-8m にしたものがもっともコスト効率のよいものとされ、経済スパンとも呼ばれている。

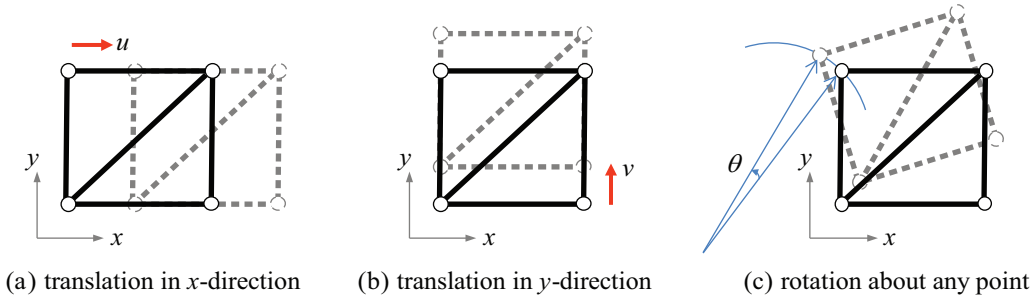
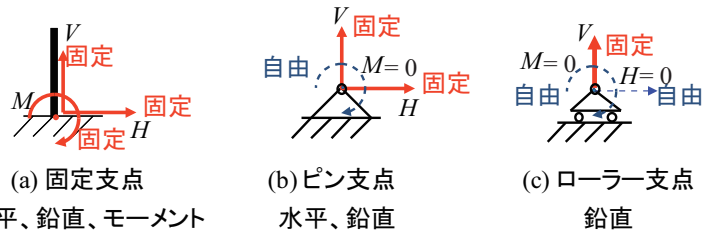


図 3.11 二次元における剛体変位 (併進・回転)



(a) 固定支点 (b) ピン支点 (c) ローラー支点

図 3.12 実際の支点：固定、ピン、ローラー。



(a) 固定支点 反力：水平、鉛直、モーメント
 (b) ピン支点 水平、鉛直
 (c) ローラー支点 鉛直

図 3.13 支点のモデル化とその反力：固定、ピン、ローラー。

図3.13にまとめられる。 M 、 V と H は、それぞれ反力のモーメント (Moment)、鉛直 (Vertical) 方向の反力および水平 (Horizontal) 方向の反力を表す。

支点の種類：

- ローラー支点：(Roller Support) 一つの方向の併進が解放、一つの方向の並進が拘束されている。したがって、拘束された並進方向のみ反力があり、モーメントは生じない。または水平方向の反力 H とモーメント M がいつでもゼロとなる：図 3.13(c) において、 $H=0, M=0$ は常に成り立っている。鉛直方向の反力 V の大きさは外力に依存する。
- ピン支点：(Pinned Support) 並進を拘束するが、回転は拘束しない。したがって、並進方向に反力がある（2次元の場合には2個）が、モーメントは生じない（またはモーメントがゼロ： $M=0$ ）。
- 固定支点：(Fixed Support) 並進も回転も拘束される。したがって、並進方向に反力（2次元の場合には2個）とモーメントは存在する。

以上の定義によって、図3.9の木と地面の接合部は固定支点としてモデル化できる。図3.10の腕はピン支点としてモデル化できる。また、橋梁などの長い構造物は温度の変化で伸び縮みによる構造損傷を避けるため、一端がピン支点、一端がローラー支点という形式がよく使われる。

3.2.3 反力の求め方

支点反力を求めるには、前章で紹介した力およびモーメントの釣合い方程式は必要となる。手順は以下のようにまとめられる。

反力を求める手順：

1. 支点反力を描く。
2. それぞれ水平方向、鉛直方向およびモーメントの釣合い方程式を立てる。
3. 上記の釣合い方程式を解くことによって、未知数である反力を求める。
4. 最後に、反力の方向を明記する。

ここで注意してほしいのは、に次元の建物に対して三つの釣合い方程式しか立てられないため、基本的には四つ以上の反力がある場合には直接解くことができない。これは、(線形独立な)方程式の数と未知数の数によるものである。反力を一意に解ける建物は、(外的)静定構造と呼ばれ、そうでない建物は(外的)不静定構造である。以下は(外的)静定構造の反力を求めるいくつかの例を説明する。

反力の計算では、反力の正方向は仮定であるため、計算結果にその方向を明記する必要がある。

3.2.3.1 片持ち梁の反力



図 3.14 片持ち梁に相当する建物またはそのパーツ

この節には、図3.15(a)に示すような一端固定、一端自由の片持ち梁 (Cantilever) を例として、反力の求め方について説明する。片持ち梁は図 3.14に示すように階段やバルコニーなどに多用されている。また、超高層ビルやタワーなども実は地面に固定された片持ち梁として考えても良い。

例 3.5. 図3.15(a)に示すような片持ち梁の反力を求めてください。

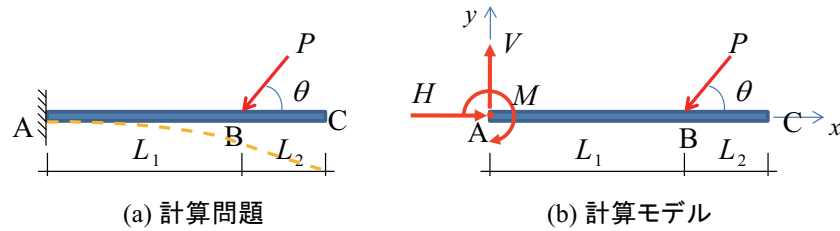


図 3.15 片持ち梁とその反力

片持ち梁の変形は図3.15(a) に点線で示している。計算手順に踏まえて、その左の固定端に生じる反力 (H, V, M) は以下のように求められる。

1. 左端の固定支点 A においては、片持ち梁の両方向（水平・鉛直）の並進および回転が拘束されているため、それぞれ水平反力 H 、鉛直反力 V およびモーメント M が生じる。したがって、図3.15(a) の計算問題を図3.15(b) の計算モデルに書き直す。
ここで、水平 (x -) 方向と鉛直 (y -) 方向の正方向も表示している。また、各反力の正方向も図の中に定義している。 $(H$ は左向き、 V は上向き、 M は時計回りを正方向とする。 x と y の正方向と一致しなくても構わない。)
2. 水平 (x -) 方向、鉛直 (y -) 方向および任意点（ここで、A 点とする）回りのモーメントの釣合い方程式は下記のように書ける。

$$\begin{aligned} \sum X &= H + (-P \cos \theta) = 0 \\ \sum Y &= V + (-P \sin \theta) = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= M + (P \sin \theta)L_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

3. 式 (3.15) には、釣合い方程式の数が 3 であり、未知数の数も 3(反力 H, V, M) であるため、未知数を一意に求めることができる：

$$\begin{aligned} H &= P \cos \theta \quad (\rightarrow) \\ V &= P \sin \theta \quad (\uparrow) \\ M &= -PL_1 \sin \theta \quad (\text{反時計まわり}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

4. 反力の方向が式 (3.16) にすでに反映している。 H, V の結果が正であるため、仮定した正方向のままである。従って、 H は左向き、 V は上向きとなる。 M の結果が負であるため、仮定した正方向（時計回り）と反対方向となり、反時計回りとして描く。

3.2.3.2 単純梁の反力

この節には、図3.16(a) に示すような単純梁を例として、反力の求め方について説明する。一端ピン支点、一端ローラー支点をもつ梁は単純梁と呼ばれている。特に、橋梁などの土木構造物に多用されている。

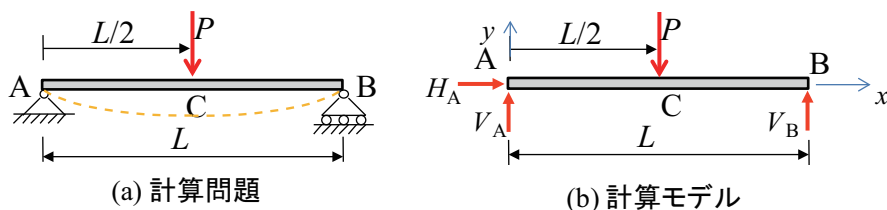


図 3.16 単純梁とその反力

例 3.6. 図3.16(a) に示すような単純梁の反力を求めてください。

単純梁の変形は図3.16(a) に点線で示している。計算手順に踏まえて、両端部に生じる反力 (H_A, V_A, V_B) は以下のように求められる。

1. 左端のピン支点 A においては、単純梁の両方向（水平・鉛直）の並進が拘束されているため、それぞれ水平反力 H_A と鉛直反力 V_A が生じる。また、右端のローラー支点 B においては、単純梁の鉛直方向の並進が拘束されているため、鉛直反力 V_B が生じる。したがって、図3.16(a) の計算問題を図3.16(b) の計算モデルに書き直す。ここで、水平 (x -) 方向と鉛直 (y -) 方向の正方向も表示している。また、各反力の正方向も図の中に定義している。時計まわりをモーメントの正方向とする。
2. 水平 (x -) 方向、鉛直 (y -) 方向および任意点（ここで、A 点とする）回りのモーメントの釣合い方程式は下記のように書ける。

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A = 0 \\ \sum Y &= V_A + V_B - P = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= H_A \cdot 0 + V_A \cdot 0 - V_B L + P \frac{L}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

3. 式 (3.17) には、釣合い方程式の数が 3 であり、未知数の数も 3 (反力 H_A, V_A, V_B) であるため、未知数を一意に求めることができる：

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A &= P/2 \quad (\uparrow) \\ V_B &= P/2 \quad (\uparrow) \end{aligned} \quad (3.18)$$

4. 反力の方向が式 (3.18) にすでに反映している。 V_A, V_B の結果が正であるため、仮定した正方向（上向き）のままである。

3.2.3.3 静定ラーメン構造の反力

ラーメン構造は、長方形に組み立てられた骨組み（部材）の各接合箇所を剛接合したものである。図 3.17(a) は 3 階建てのラーメン構造の実例を示している。その反力の計算も、片持ち梁の場合と同じような手順で力およびモーメントの釣合いによって求めることができる。



(a) ラーメン構造



(b) 3ヒンジラーメン構造

図 3.17 実際のラーメン構造 (a) と 3 ヒンジラーメン構造 (b)

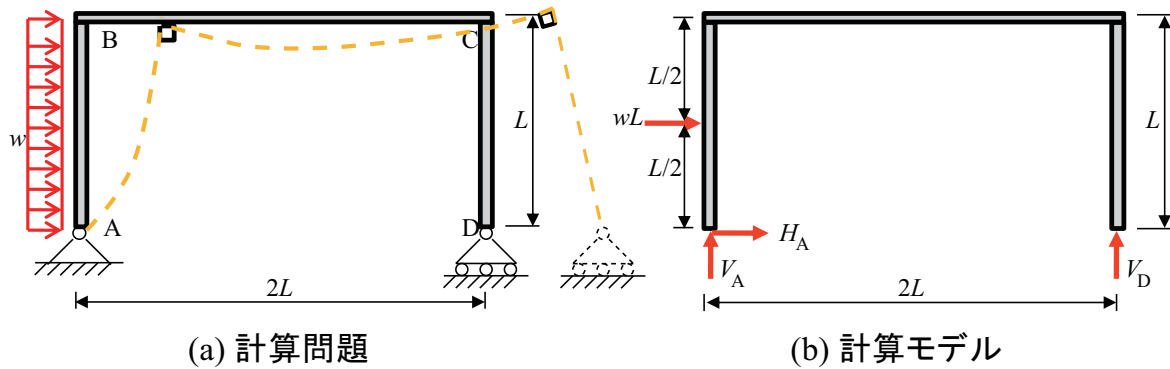


図 3.18 静定ラーメン構造の反力

例 3.7. 図3.18の(外的)静定ラーメン構造の反力を求めてください。

静定ラーメン構造の変形は図 3.18(a) に点線で示している。部材 AB と部材 BC 間の接合部 B および接合部 C は剛性であるため、変形後も部材間の角度 (90°) が保たれる。

1. とりあえず、図 3.18(a) の計算問題を (b) の計算モデルに変換する：

- 支点の拘束を解除し、反力 V_A, H_A, V_D を描く。
(左側はピン支点 A で、鉛直・水平方向にも動けないため、鉛直・水平方向の反力 V_A, H_A がかかっている；右側はローラー支点 D で、鉛直方向に動けないため、鉛直方向の反力 V_D のみかかっている。)
- 分布荷重を集中荷重に置換する。集中荷重の大きさは分布荷重の面積 wL であり、方向は分布荷重の方向と同じく右向き、作用点は分布荷重の図心の中央点にある。

2. 力およびモーメントの釣合い方程式を立てると、以下の三つの方程式がある。

$$\begin{aligned}\sum X &= H_A + (wL) = 0 \\ \sum Y &= V_A + V_D = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= (wL)\frac{L}{2} - V_D 2L = 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

3. 三つの未知数 V_A, H_A, V_D に対して、三つの方程式があるため、未知数を一意に解ける：

$$\begin{aligned}\underline{H_A} &= -wL \quad (\leftarrow) \\ \underline{V_D} &= \frac{wL}{4} \quad (\uparrow) \\ \underline{V_A} &= -V_D = -\frac{wL}{4} \quad (\downarrow)\end{aligned}\quad (3.20)$$

3.2.3.4 3 ヒンジラーメン構造の反力

連立方程式を解くには、ポイントは未知数の数に合わせて同じ数の方程式が必要である。建物全体に対して、その力・モーメントの釣合い方程式は二次元の場合には三つがある。したがって、反力の数が 4 以上の場合には、そのまま解けないため、別の(釣合い)方程式⁴が必要となる。たとえば、図3.19に示すような三つのヒンジ(ピン)を有するラーメン構造(ピン支点・

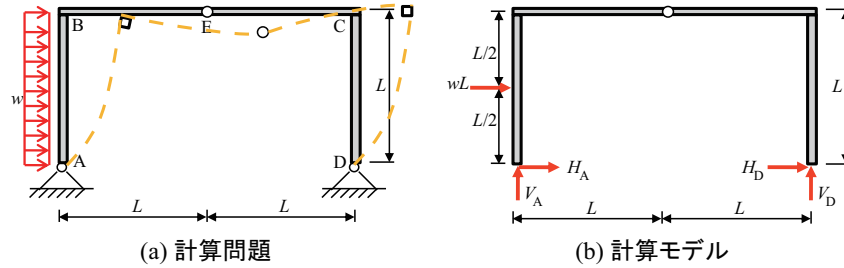


図 3.19 3 ヒンジラーメン構造の反力：ピン接合の曲げモーメントがゼロを利用して、四つの反力を求める。

接合部は三つある) に対して、その反力を求めてみる。その実物については図3.17(b)を参照ください。

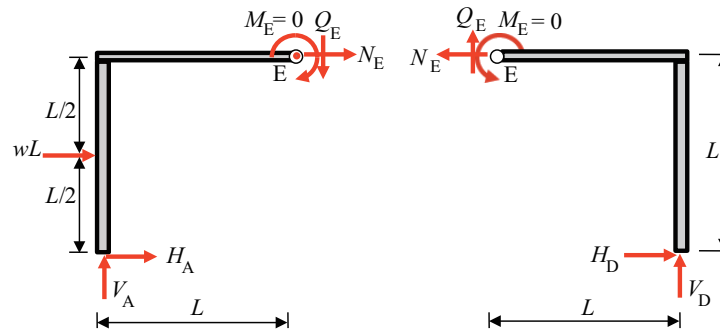


図 3.20 3 ヒンジラーメン構造：節点 E を仮想的に切断し、右半分を計算モデルとする。

例 3.8. 図3.19に示すような 3 ヒンジラーメン構造の反力を求めてください。

3 ヒンジラーメン構造図の変形は3.19に点線で示している。ここで、部材 BE と部材 EC は共通の E 点においてその変位が連続しているが、その勾配（接線方向）は不連続であることに注意されたい。

図3.19にのラーメン構造は、二つのピン支点および一つのピン接合部、合わせて三つのピン（ヒンジ）がある。左側も右側もピン支点のため、それぞれ二つ（鉛直・水平）の反力があり、全部で四つの未知な反力（ V_A, H_A, V_D, H_D ）がある。

しかし、構造物全体を対象とした釣合い方程式は二次元の場合に以下のような三つしかない。

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A + H_D + (wL) = 0 \\ \sum Y &= V_A + V_D = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= (wL) \frac{L}{2} - V_D 2L = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

これを用いて、 V_A, V_D は以下のように解けるが

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{wL}{4} \quad (\uparrow) \\ V_A &= -V_D = -\frac{wL}{4} \quad (\downarrow) \end{aligned} \quad (3.22)$$

⁴ 未知数の数に対して、釣合い方程式の数が足りない構造は、不静定構造である。それを解くために、変位の適応条件が必要となる。

H_A, H_D を求めるために、もう一つの釣合い方程式が必要となる。そのために、ピン接合部の特性を利用する。

節点Eはピン接合部であり、部材 BE、CE 間の相対的回転を拘束していないため、その曲げモーメントがゼロである。そして、節点Eのところを仮想的に切断すると、図3.20のように描く：

- 仮想的に切断されたところに、切断される前の两部分の相対的關係も維持するために、三つの断面力がある（詳細については、後で説明する）。
- それぞれは部材と平行の軸力 N_E 、部材と直交のせん断力 Q_E および回転の曲げモーメント M_E 。左と右の断面力は作用点（E点）と大きさは一緒、方向は反対となっている。

前述したように、節点Eはピン接合であり、モーメントが生じないため、 $M_E = 0$ は既知となる。しかし、残りの二つの断面力 Q_E, N_E は未知数である。 $M_E = 0$ を利用すれば、もう一つの方程式を書き、式(3.21)の三つの方程式を合わせ、四つの反力を求めることが可能となる。

図3.20の計算モデルにもいろいろな力がかかるが、釣合い状態にある。釣合い方程式を書く場合に、左の半分モデルでも、右半分モデルでもよいが、右半分モデルを考える場合に外力荷重 wL はないため、計算上が楽となる。さらに、 Q_E, N_E は未知数であるので、できるだけ釣合い方程式の中で消してほしい。そして、右半分モデルで、E点まわりのモーメント釣合い方程式を書くと

$$\begin{aligned}\sum M_{E \text{ 点まわり}} &= -M_E - V_D L - H_D L \\ &= -V_D L - H_D L \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.23}$$

となり、整理すると

$$\underline{H_D} = -V_D = -\frac{wL}{4} \quad (\leftarrow)\tag{3.24}$$

が分かる。これを、式(3.21)の一番目の式に代入して整理すると

$$\underline{H_A} = -wL - H_D = -\frac{3wL}{4} \quad (\leftarrow)\tag{3.25}$$

というふうに解ける。

3.3 断面力（軸力、曲げモーメント、せん断力）

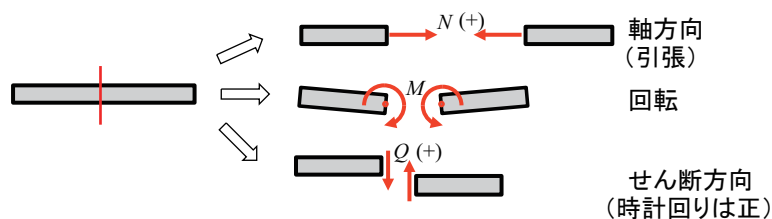


図 3.21 断面力：軸力、曲げモーメント、せん断力

前節の3ヒンジラーメン構造の反力を求める際にでてきたように、構造物のある部材を仮想的に切断すれば、一本の部材が（仮想的に）二本のものに分けられる。しかし、もともと共通の切断面において、両側の相対変位がゼロであるため、その相対変位が拘束されていることとなる。この拘束効果をもたらすには、断面力が働いている。ちなみに、断面力は、切断面に働いているすべての力（応力⁵）の総和を表し、断面の具体的な形状には関係ない。

⁵ 応力 (Stress) は、単位面積あたりの力として定義される。

建物の場合に、基本的には図3.21に示すような軸力 (Axial Force)、曲げモーメント (Bending Moment) およびせん断力 (Shear Force) がメインとなっている。(それ以外、ねじれなどがある。)

建物の部材に生じる主な断面力：

- 軸力： (仮想的に) 切断された部材の二つの部分の切断面は、軸方向に沿って離れないように働く力。
ここで、引張力 (切断面を離れる方向の力) を正とし、圧縮力 (切断面に向いている方向の力) を負と定義される。
- 曲げモーメント： (仮想的に) 切断された部材の二つの部分、切断面まわり相対的に回転しないように働くモーメント。
曲げモーメントに正方向が定められていないが、図示の場合に、引張となる側に描く。
- せん断力： (仮想的に) 切断された部材の二つの部分、部材の軸方向と直交する方向に沿って離れないように働く力。
対象とした部分を時計回しさせるほうを正方向とし、反時計回りさせるほうを負方向とする。

ここで注意してほしいのは、反力には正負方向が定義されていないが、断面力には曲げモーメント以外は正負方向が定義されている。また、曲げモーメントを図示する場合に、引張側に描く必要がある。これは、構造設計 (特に鉄筋コンクリートの設計) に非常に重要⁶である。

また、ピン接合を仮想的に切断した場合に、両側の相対的回転が自由なので、曲げモーメントが生じない、またはゼロである。この条件は、前節の3ヒンジラーメンの反力計算にも利用された。

3.4 宿題

Exercise 3.1. 図3.22にある片持ち梁の変形図を描いて、その反力を求めてください。

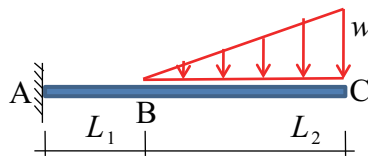


図 3.22 片持ち梁の反力計算 (宿題3.1)

Exercise 3.2. 図3.23にある単純梁の変形図を描いて、その反力を求めてください。

Exercise 3.3. 図3.24にある3ヒンジラーメン構造の変形図を描いて、その反力を求めてください。

⁶ コンクリートの引張強度は、圧縮強度の十分の一ぐらいしかないため、引張側の力の中は鉄筋によって負担される。

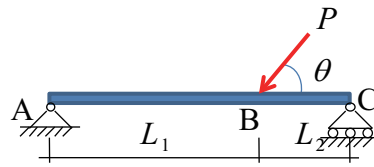


図 3.23 単純梁の反力計算 (宿題3.2)

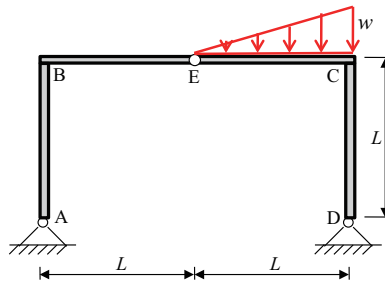


図 3.24 3 ヒンジラーメン構造の反力計算 (宿題3.3)

Chapter 4 静定トラス構造

Abstract この章には、静定トラス構造の力学特性および軸力の解法について説明する。

4.1 トラス構造の力学特性

トラス構造には、異なる部材はピン接合によって接続される。

トラスの力学特性

外力は部材の両端部、要するに、節点にかかるとき、トラス構造の各部材には、軸力しか存在しない。

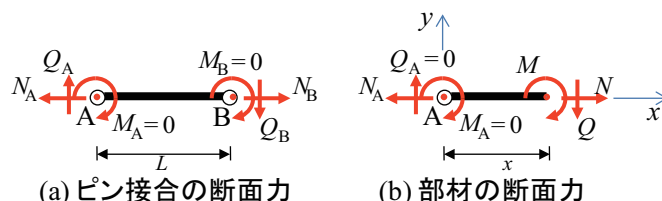


図 4.1 トラス構造の断面力：軸力しか存在しない

すなわち、トラス構造の場合に、部材には曲げモーメントおよびせん断力が生じない。これを証明するには、図4.1に示すようなトラス構造の1本の部材を考える。

例 4.1. トラス構造の部材に軸力しか存在しないことを証明せよ。

部材の両側はピン接合なので、曲げモーメント M_A, M_B はゼロであることが分かっている。A 点まわりのモーメントの釣合い方程式によって、

$$\begin{aligned} M_{A \text{ 点まわり}} &= M_A + M_B + N_A \cdot 0 + Q_B \cdot 0 + N_B \cdot 0 + Q_B \cdot L = Q_B \cdot L = 0 \\ \Rightarrow Q_B &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

が分かる。同じように、A 点のせん断力 Q_A もゼロとなるため、ピン接合のところには軸力しか存在しない。さらに、部材の軸方向の釣合い方程式によって、軸力の関係が分かる。

$$\begin{aligned} \sum \text{軸方向の力} &= -N_A + N_B = 0 \\ \Rightarrow N_A &= N_B \end{aligned} \quad (4.2)$$

ピン接合にかかる断面力が分かった後、部材の内部に働いている断面力を考えてみよ。図4.1(a)の部材を適当に切断し、左半分を考え、その切断面に生じる断面力を図4.1(b)に示すように描いておく。力およびモーメントの釣合い方程式によっては

$$\begin{aligned}\sum X &= -N_A + N = 0 \implies N = N_A \\ \sum Y &= Q_A - Q = 0 \implies N = Q_A = 0 \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} &= M_A + M + Q_A \cdot x + N_A \cdot 0 = 0 \implies M = 0\end{aligned}\quad (4.3)$$

が分かり、ピン接合にかかる断面力とまったく同じものである。これは、トラス構造の軸力分布を求めるにはよく使われている条件である。

しかし、ここで注意されたいのは、外力荷重が部材の間にも作用するとき、トラスの部材は普通の梁と同じように、せん断力も曲げモーメントも生じる。

4.2 トラス構造の静定・安定

4.2.1 静定と不静定

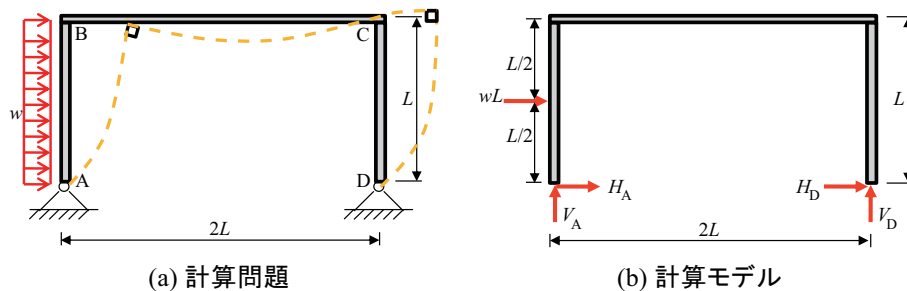


図4.2 不静定ラーメン構造：二次元の場合に、三つの釣合い方程式に対して、四つ（以上）の反力があるので、そのままでは解けない。

第三章にある静定ラーメン構造および3ヒンジラーメン構造の例題では、反力の数と釣合い方程式の数は同じなので、反力を求めることができたが、例えば、図4.2のラーメン構造のように、四つの反力に対して三つの釣合い方程式しか書けない場合がある。したがって、釣合い方程式のみで、この構造の反力を求めることはできない。

静定と不静定：

力とモーメントの釣合い方程式のみで、反力・断面力を一意に求められる構造を静定構造 (Static Determinacy) と呼ぶ。

力とモーメントの釣合い方程式のみで、反力・断面力を一意に求められない構造は、不静定構造 (Static Indeterminacy) と呼ばれる。

したがって、図4.2のようなラーメン構造は不静定構造である。ここで注意してほしいのは、釣合い方程式で反力（または断面力）が求められても、断面力（または反力）が求められない場合も不静定構造となる。不静定構造の場合に、釣合い方程式だけでは、方程式の数は足りないが、将来に説明する変位（の適合条件）を考えると、解けるようになる。

さらに、釣合い方程式からすぐ分かるように、静定構造の場合に外力が作用しない時、断面力（軸力）もゼロとなることが自明である。しかし、不静定構造の場合には、外力がなくても断面力（軸力）が存在する可能性がある。

実際の建築構造物はほとんど不静定構造であるが、構造力学には、とりあえずより簡単な静定構造の断面力分布および変形の求め方を勉強してから、不静定構造に展開していく。

4.2.2 安定と不安定

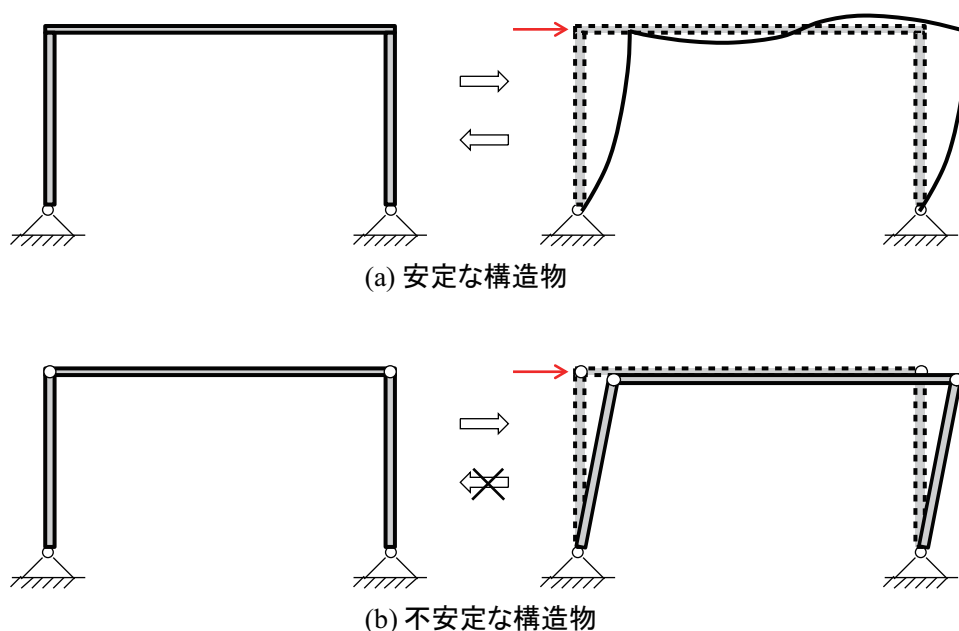


図 4.3 安定・不安定構造：安定な構造物は、外力によって形が変わるが、外力をなくしたら元の形状に戻れる。不安定な構造の場合には、外力をなくしても元の形状に戻れない。

釣合いと安定は、構造物にとって二つ重要な概念である。釣合い (Equilibrium) とは、第二章でも説明したように、ある構造物（または部材や点など）に作用する力およびモーメントの総和はゼロである状態を示す。

安定と不安定：

安定 (Kinematic Determinacy) というのは、構造物に少しの外力を加えると変形するが、外力をなくしたら変形も消えて元の形状・位置に戻ることを示す。それに対して、不安定 (Kinematic Indeterminacy) というのは、外力をなくして元の形状・位置に戻れないことを示す。

例えば、図4.3(a)の（不静定）ラーメン構造の上層に水平方向の外力をかけると、図に示すように変形するが、この外力をなくしたら元の形状に戻るため、安定構造である。図4.3(b)の構造は、図4.3(a)の構造の剛接合をピン接合に置換されたものであり、水平方向の外力をかけると、構造物は全体的に斜めになり、外力をなくしても元の形状には戻れないため、不安定構造である。

建築構造は、もちろんすべては安定な構造であるが、機械系などの分野では、構造物の形を変える場合もあるので、不安定構造も取り扱っている。

4.2.3 Maxwell's ルール

構造物は静定か安定かを判断するには、Maxwell's ルールという簡単な条件式がある。しかし、この条件式はピン接合の（トラス）構造のみ適応¹している。部材の数を m 、節点の数を n 、次元を d 、反力の数を p で表すと、Maxwell's ルールは以下ようになる。

Maxwell's 条件式：

$$m - n \times d + p \begin{cases} > 0: \text{不静定かつ安定} \\ = 0: \text{静定かつ安定} \\ < 0: \text{不安定} \end{cases} \quad (4.4)$$

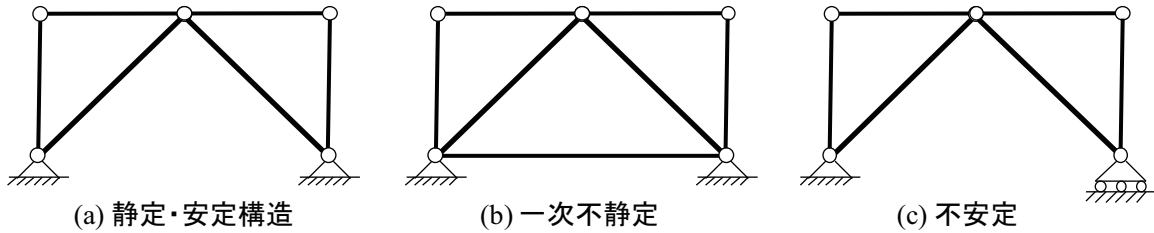


図 4.4 Maxwell's ルールにより静定・安定の判断

例 4.2. Maxwell's ルールを使って、図4.4の三つのトラス構造の静定性および安定性を判定してください。

式 (4.4) の Maxwell's ルールを適用すれば、図4.4の三つのトラス構造はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad m - n \times d + p &= 6 - 5 \times 2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \text{安定・静定} \\ \text{(b)} \quad m - n \times d + p &= 7 - 5 \times 2 + 4 = 1 \quad \Rightarrow \text{安定・一次不静定} \\ \text{(c)} \quad m - n \times d + p &= 6 - 5 \times 2 + 3 = -1 \quad \Rightarrow \text{不安定} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となることが分かる。

4.2.3.1 Maxwell's ルールの例外

実は、Maxwell's ルールには例外がある²。そのため、Maxwell's ルールはあくまでもトラス構造の安定・静定に関する簡易的判定条件である。特殊な構造物に対しては、更なる精査が必要となる場合がある。

例 4.3. Maxwell's ルールの例外

図 4.5に示すような二次元 ($d = 2$) トラス構造は、6 本の部材 ($m = 6$)、5 個の節点 ($n = 5$) および四つの反力 ($p = 4$) をもつ。

Maxwell's ルールによつては、

$$m - n \times d + p = 6 - 5 \times 2 + 4 = 0 \quad (4.6)$$

¹ ラーメン構造の静定・安定については、回転拘束を解放し、トラスモデルに変換することによって Maxwell's ルールも適用できる。詳細については、第五章に説明する。

² 現時点では気にしなくてよいので、下記の内容は紹介の役割だけである。

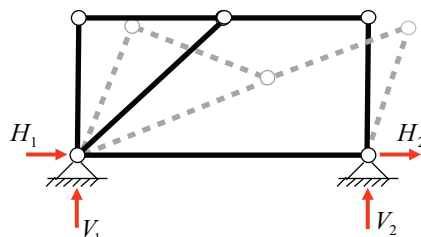


図 4.5 Maxwell's ルールによつては安定かつ静定であるが、実は 1 次不安定かつ 1 次不静定である。

となり、静定かつ安定な構造物になりそうだが、実は図 4.5 に示すような点線で変形できるため、不安定な構造物である。さらに、支点の間の部材にはいくらの張力を導入してもできるため、不静定な構造でもある。

テンセグリティ (Tensegrity = Tensile + Integrity) 構造は、トラスと同じようなピン接合の構造である。Maxwell's ルールによつては、ほとんどのテンセグリティ構造は不安定であるが、部材に予め張力を導入することによつて、構造物が安定化させる。

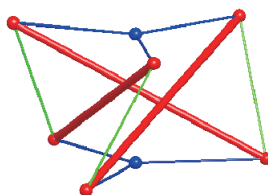


図 4.6 Maxwell's ルールの例外：安定なテンセグリティ構造。(不安定次数が高いが、張力の導入によつて安定となる。)

例 4.4. Maxwell's ルールにより図 4.6 のテンセグリティ構造に関する安定性調査

図 4.6 に示すような三次元 ($d=3$) Star-shaped テンセグリティ構造は、12 本の部材 ($m=12$) と 8 個の節点 ($n=8$) をもつ。三次元空間において、剛体変位を拘束するために、六つの反力 ($p=6$) が必要である。

Maxwell's ルールによつては、

$$m - n \times d + p = 12 - 8 \times 3 + 6 = -6 \quad (4.7)$$

その不安定次数が高いため、張力が存在しない場合には不安定な構造物である。

実は、この構造物は 1 次不静定であり、7 次不安定である。しかし、図に示すように細い部材 (ケーブル) に引張力、太い部材 (棒材) に圧縮力を導入することによつて、この構造物は安定となる。

テンセグリティ構造は必要最小限の数の部材で安定な構造物を構築しているため、ある意味では最適な構造形式といわれている。

4.3 トラス構造の断面力（軸力）の解法

静定トラス構造の軸力を求めるには、切断法と節点法がある³。節点法は実際には切断法の特異な応用である。この二つの手法はそれぞれの長所があるため、場合によつて選ばば問題が簡単に解けるようになるケースが少なくない。

³ 将来はコンピュータに向いている行列法も紹介する。

4.3.1 切断法

切断法のポイントは、構造物全体を二つの部分に切断し、切断された部材の軸力と反力による力・モーメントの釣合い方程式によって切断された部材の軸力を求める。したがって、一回に切断する軸力が未知の部材の数は3以下でないと解けなくなる。

切断法の計算手順を以下のようにまとめる。

1. Maxwell's ルールによって、静定か不静定かを判断する。静定トラスの場合には以下の手順で解ける。
2. 反力を求める。(場合によって省略できる)
3. 軸力を求めたい部材を含む周辺の3つの部材を切断して、トラスを2つの部分に分ける。
4. 切断した部材の軸力を外力として作用させる。
5. 力とモーメントに関する3つの釣合い方程式をたてる。
6. 釣合い方程式3つあるので、3つの未知軸力を一意に求める。

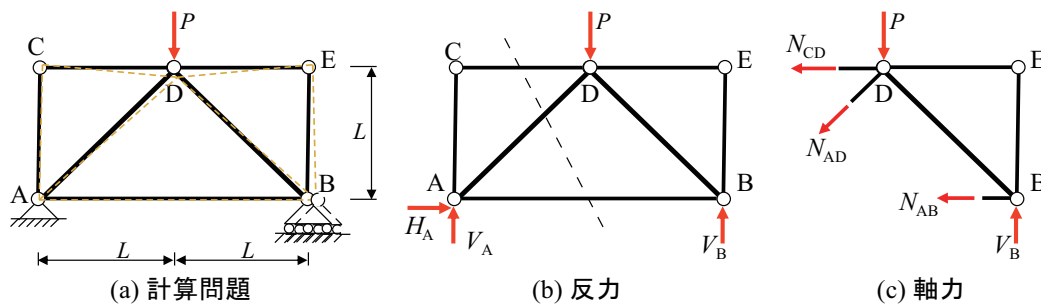


図 4.7 切断法の例題

例 4.5. 図4.7(a) のトラス構造に対して以下の小問題を解いてください。

- ① このトラス構造が静定性および安定性を Maxwell's ルールによって判断してください。
- ② 切断法を使って、部材 AD, AB, CD の断面力（軸力）を求めてください。

図4.7(a) のトラス構造の変形は、点線で表されている。

① 静定・安定の判断

A 点がピン支点のため、反力は二つがあり、B 点がローラー支点のため、鉛直反力のみがある。したがって、反力の数は3である ($p=3$)。

また、トラス構造は7本の部材 ($m=7$) と五つの節点 ($n=5$) をもつため、Maxwell's ルールを適用すると

$$m - n \times d + p = 7 - 5 \times 2 + 3 = 0 \quad (4.8)$$

このトラス構造は静定かつ安定であることが分かる。従って、力およびモーメントの釣合い方程式のみでその反力および断面力（この場合に、軸力）を求めることができる。

② 切断法

反力計算：

支点反力を図4.7(b) のように描く。トラス構造全体を対象とし、その力・モーメントに関する釣合い方程式を立てると、反力は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\sum X = H_A = 0 &\implies \underline{H_A} = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} = PL - V_B(2L) = 0 &\implies \underline{V_B} = \frac{P}{2} \quad (\uparrow) \\ \sum Y = V_A + V_B - P = 0 &\implies \underline{V_A} = P - V_B = \frac{P}{2} \quad (\uparrow)\end{aligned}\quad (4.9)$$

軸力計算：

さらに、図4.7(b)の破線で部材 CD、AD、AB を仮想的に切断して、右半分の構造を考える。部材の軸力および外力（反力も含めて）は図4.7(c)のように描ける⁴。未知数は軸力 N_{CD}, N_{AD}, N_{AB} であり、3つあるため、3つの釣合い方程式によってこの問題を解くことが出来る。

簡単順から解いていくと、切断された部材の軸力は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\sum M_{D \text{ 点まわり}} = -N_{AB}L + V_B L = 0 &\implies \underline{N_{AB}} = V_B = \frac{P}{2} \\ \sum Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_{AD} + V_B - P = 0 &\implies \underline{N_{AD}} = \sqrt{2}(-P + V_B) = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \\ \sum X = -N_{CD} - \frac{\sqrt{2}}{2}N_{AD} - N_{AB} = 0 &\implies \underline{N_{CD}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_{AD} - N_{AB} = 0\end{aligned}\quad (4.10)$$

ここで、軸力の定義によっては、正は引張力、負は圧縮力を表している。

4.3.2 節点法

節点法は、一つ一つの節点を計算対象とし、(二つの)力の釣合い方程式によって未知の軸力を求める手法である。実は、節点法は切断法の特例である：節点まわりに(曲線で)部材を切断すると、対象の節点に接続している部材の軸力のみ残るため、節点法が適用する。

しかし、この場合には、すべての力(軸力および外力)は一つの(節)点に作用しているため、モーメントの釣合い方程式は自明となる：力の釣合いによっては対象節点にかかる力の総和はゼロとなるので、この合力の任意点まわりのモーメントも必ずゼロとなる。したがって、節点を対象とした場合には、2次元において二つの力の釣合い方程式しか書けないので、解き順番に注意しないとできない：解ける節点から順番に解いていく、すなわち先に二つ以下の未知軸力を有する節点から解かないとできない。

節点法の計算手順は以下のようにまとめる。

1. Maxwell's ルールによって、静定か不静定かを判断する。静定トラスの場合には以下の手順で解ける。
2. 反力を求める。(場合によって省略できる)
3. 未知軸力が2つ以下である節点を対象とする。
4. 対象節点に対して、外力と軸力を二つの方向に分解し、力の釣合い条件により、未知軸力を求める。
5. ステップ3と4を繰り返して、軸力を一つずつ求める。

例 4.6. 図4.7(a)のトラス構造に対して、節点法を使って、すべての部材の断面力(軸力)を求めてください。

図4.8(a)のトラス構造の静定・安定判断および反力の計算は、例 4.5を参考してください。ここには省略する。

また、図4.8(a)に対して各節点まわりを切断し、一つ一つの節点を取り出して、切断された部材の軸力を描くと、図4.8(b)のようになる。

⁴ 軸力の向きは、正方向の引張方向として描くことを注意してほしい。

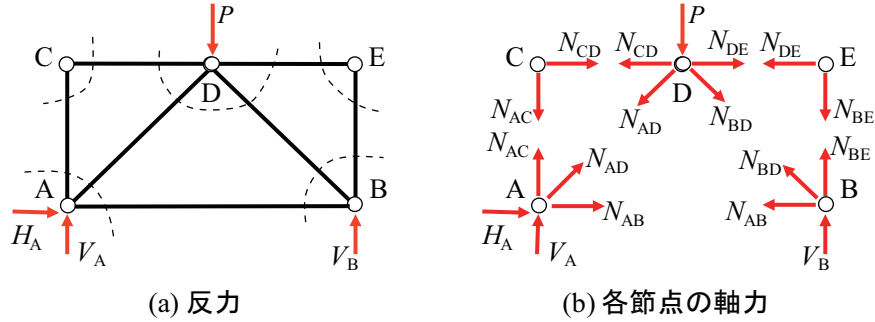


図 4.8 節点法の例題：(a) の計算モデルに対して、各節点のみを切断し取りたして考えると、各節点の釣合いは (b) のようになる。

反力 H_A, V_A, V_B をすでに (例 4.5) 求められたとすると、各節点における未知の軸力の数は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
 \text{A 節点} &: 3 (N_{AB}, N_{AC}, N_{AD} + V_A + H_A) \\
 \text{B 節点} &: 3 (N_{AB}, N_{BD}, N_{BE} + V_B) \\
 \text{C 節点} &: 2 (N_{AC}, N_{CD}) \\
 \text{D 節点} &: 4 (N_{AD}, N_{BD}, N_{CD}, N_{DE}) \\
 \text{E 節点} &: 2 (N_{BE}, N_{DE})
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

一つの節点に多くても二つの未知軸力でなければならないため、例えば以下のような順番で解いていく。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{C} & \longrightarrow & \text{E} & \longrightarrow & \text{A} & \longrightarrow & \text{B} & \longrightarrow & \text{D} \\
 (N_{AC}, N_{CD}) & & (N_{DE}, N_{BE}) & & (N_{AD}, N_{AB}) & & (N_{BD}) & & (\text{結果の検証})
 \end{array} \tag{4.12}$$

具体的には、以下のように一つ一つの節点を対象にして未知の軸力を求める。

$$\begin{aligned}
 \text{C 点} &: \begin{cases} \sum X = N_{CD} = 0 \implies \underline{N_{CD}} = 0 \\ \sum Y = -N_{AC} = 0 \implies \underline{N_{AC}} = 0 \end{cases} \\
 \text{E 点} &: \begin{cases} \sum X = -N_{DE} = 0 \implies \underline{N_{DE}} = 0 \\ \sum Y = -N_{BE} = 0 \implies \underline{N_{BE}} = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
 \text{A 点} &: \begin{cases} \sum Y = N_{AC} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} + V_A = 0 \implies \underline{N_{AD}} = \sqrt{2}(-N_{AC} - V_A) = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \\ \sum X = H_A + N_{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} = 0 \implies \underline{N_{AB}} = -H_A - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} = \frac{1}{2}P \end{cases} \\
 \text{B 点} &: \sum X = -N_{AB} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BD} = 0 \implies \underline{N_{BD}} = -\sqrt{2}N_{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \\
 \text{D 点} &: \begin{cases} \sum X = -N_{CD} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} + N_{DE} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BD} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P = 0 \\ \sum Y = -P - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BD} = -P + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P = 0 \end{cases} \implies \text{計算 OK}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで、軸力を求めるには、D 点の計算は不要であるが、D 点において力の総和がゼロとなるかどうかによって計算結果は正しさを検証できる。また、各部材の軸力を図 4.9 に示す。軸力の定義によっては、正の軸力が引張力、負の軸力が圧縮力を意味する。

実は、この例題ではたくさんの解き順番がある。たとえば、以下の順番で進むと、反力を求めなくてもすべての部材の軸力を求めることができる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{C} & \longrightarrow & \text{E} & \longrightarrow & \text{D} & \longrightarrow & \text{B} \\
 (N_{AC}, N_{CD}) & & (N_{DE}, N_{BE}) & & (N_{AD}, N_{BD}) & & (N_{AB})
 \end{array} \tag{4.15}$$

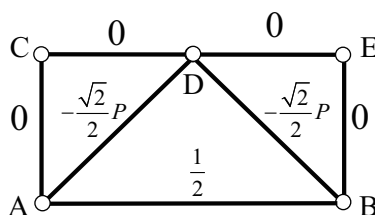


図 4.9 例 4.6の計算結果。

4.3.3 切断法と節点法の比較

この章で紹介した切断法も節点法も、構造物の一部または節点対象とし、力・モーメントの釣合い方程式を解くことによって、トラスの軸力を一つずつ求めていくものである。したがって、手計算には向いているが、行列の計算が強いコンピュータの計算能力を生かすのは容易ではない。それに対しては、行列という形で釣合い方程式をまとめてコンピュータで一掃に計算する行列法がある。

また、トラス構造のある部分の軸力を求めたい場合に、切断法は一般的に適用される。すべての軸力を求める場合には、節点法のほうがより解きやすいケースが多い。

さらに、例題でもあったように、解く順番も計算コストに影響してくる。

4.4 トラス構造のための行列解法

構造力学の基本を理解してもらうために、すべて手計算ができるような問題を考えている。しかし、実際の建物は手計算できる問題よりもずっと大規模であり、現実的には手計算が難しい。実務構造設計において、コンピュータによる構造計算は必須となっている。コンピュータは行列計算に強いため、構造計算も基本的には行列式で定式化してから、コンピュータで計算を行っている。

静定構造に対しては、力・モーメントの釣合い方程式のみで、すべての反力・断面力を一意に求めることができる。それらのすべての釣合い方程式を行列式にまとめると、以下のような形式で書ける。

$$\mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}\mathbf{s} = -\mathbf{p} \quad (4.16)$$

ここで、 \mathbf{D} は釣合い行列 (Equilibrium Matrix)、 \mathbf{s} は反力を含む断面力ベクトル (Force Vector)、 \mathbf{p} は外力ベクトル (Load Vector) である。外力をうけて建物のすべての反力および断面力を求める問題においては、断面力ベクトル \mathbf{s} は未知数となり、釣合い行列は正則⁵の場合に、以下のように解ける。

$$\mathbf{s} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{p} \quad (4.17)$$

ここで、 \mathbf{D}^{-1} は釣合い行列 \mathbf{D} の逆行列である。

次は、 d 次元⁶の n 個の節点および m 本の部材を持つトラス構造を考える。また、反力の数は p とする。したがって、釣合い行列 \mathbf{D} のサイズは $(dn) \times (m+p)$ 、(断面) 軸力ベクトル \mathbf{s} のサイズは $(m+p) \times 1$ 、外力ベクトル \mathbf{p} のサイズは $dn \times 1$ となる。

⁵ 正則な行列は逆行列をもてる。行列の逆行列を求めるには、たとえば MS Excell の MINVERSE 関数または無料で使える Octave の inv() 関数などがある。

⁶ 二次元の場合 $d=2$ 、三次元の場合 $d=3$ 。

例 4.7. 図 4.7(a) のトラス構造に対して、行列法を使って、すべての反力および部材軸力を求めてください。

図 4.7(a) のトラス構造は、五つの節点、七つの部材および三つの反力を有する。すなわち

$$n = 5, \quad m = 7, \quad p = 3 \quad (4.18)$$

釣合い行列を $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ で表す。軸力ベクトルを ${}^7\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ で表し、その成分は以下のとおりである。

$$\mathbf{s} = (N_{AB} \ N_{AC} \ N_{AD} \ N_{BD} \ N_{BE} \ N_{CD} \ N_{DE} \ H_A \ V_A \ V_B)^\top \quad (4.19)$$

ここで、 $(\dots)^\top$ はベクトルまたは行列の転置である。外力ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ で表し、その成分は以下のとおりである。

$$\mathbf{p} = (P_A^x \ P_A^y \ P_B^x \ P_B^y \ P_C^x \ P_C^y \ P_D^x \ P_D^y \ P_E^x \ P_E^y)^\top \quad (4.20)$$

各節点に関する水平および垂直方向の釣合い方程式を行列の形式で整理すると、下のような式となる。

$$\begin{pmatrix} \sum X_A \\ \sum Y_A \\ \sum X_B \\ \sum Y_B \\ \sum X_C \\ \sum Y_C \\ \sum X_D \\ \sum Y_D \\ \sum X_E \\ \sum Y_E \end{pmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

ここで、釣合い行列 \mathbf{D} は例4.6の節点法で立てた釣合い方程式によって、以下のようにまとめることができる。

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & & & & & & & & 1 \\ & 1 & \sqrt{2}/2 & & & & & & & 1 \\ -1 & & & -\sqrt{2}/2 & & & & & & 1 \\ & & & \sqrt{2}/2 & 1 & & & & & 1 \\ & -1 & & & & 1 & & & & \\ & & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & & -1 & 1 & & & \\ & & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & & & & & & \\ & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

また、外力ベクトル \mathbf{p} は以下のようなになる。

$$\mathbf{p} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0)^\top P \quad (4.23)$$

釣合い行列 \mathbf{D} の逆行列 \mathbf{D}^{-1} は以下のように計算できる。

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

そして、その反力および軸力は式 (4.17) を適用して、以下のように求められる。

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} N_{AB} \\ N_{AC} \\ N_{AD} \\ N_{BD} \\ N_{BE} \\ N_{CD} \\ N_{DE} \\ H_A \\ V_A \\ V_B \end{pmatrix} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} P \tag{4.25}$$

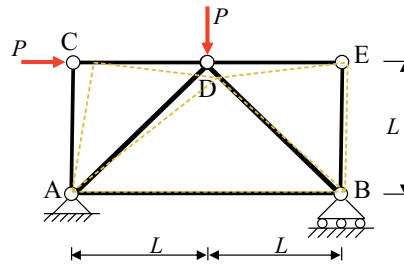


図 4.10 例 4.8の静定トラス構造

釣合い行列 \mathbf{D} は構造物の特性を反映したもので、外力と関係ない。したがって、同じ構造であれば、その釣合い行列も同じである。

例 4.8. 図 4.10のトラス構造に対し、すべての反力および部材軸力を求めてください。

外力の作用の下で、図 4.10のトラス構造の変形図が点線で表されている。
その反力および軸力は式 (4.17) を適用して、以下のように求められる。

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} N_{AB} \\ N_{AC} \\ N_{AD} \\ N_{BD} \\ N_{BE} \\ N_{CD} \\ N_{DE} \\ H_A \\ V_A \\ V_B \end{pmatrix} = -\mathbf{D}^{-1} \begin{pmatrix} P_A^x \\ P_A^y \\ P_B^x \\ P_B^y \\ P_C^x \\ P_C^y \\ P_D^x \\ P_D^y \\ P_E^x \\ P_E^y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P \tag{4.26}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P$$

⁷ スペースを節約するため、縦ベクトルを転置 \top を使って横ベクトルのように書く。

以上の例題から、釣合い行列が正則、すなわち逆行列をもつ場合に、未知数である反力および軸力（断面力）を一意に求めることができる。これは静定構造の性質に一致することを思い出してほしい。

さらに行列を分析すると、未知数が $m+p$ 個があり、（線形独立な）方程式がちょうど dn 個がある。

$$m+p=dn, \quad \text{または} \quad m+p-dn=0 \quad (4.27)$$

の場合しか、この線形方程式が解けない。これは Maxwell's ルールと同じ結論に至ることに注意してほしい。

4.5 宿題

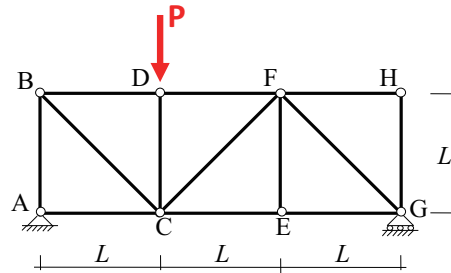


図 4.11 宿題4.1、4.2と4.3

Exercise 4.1. 図 4.11のトラス構造に対して

1. その変形図を描いてください。
2. その静定・安定を Maxwell's ルールによって判断する。
3. 切断法を使って部材 DF, CF, CE の軸力を求めてください。

Exercise 4.2. 図 4.11のトラス構造に対して、節点法を使ってすべての部材の軸力を求めてください。

Exercise 4.3. 図 4.11のトラス構造に対して、行列法を使ってすべての反力および部材の軸力を求めてください。

Chapter 5

静定梁と静定ラーメン構造の断面力計算

Abstract トラス構造に軸力しか存在しないのとは異なって、梁とラーメン構造には軸力だけでなく、せん断力と曲げモーメントも存在する。この章では、静定の梁およびラーメン構造の断面力を求める方法について説明する。

5.1 静定・不静定の判断

前章で説明した Maxwell's ルールは、ピン接合であるトラス構造の静定性・安定性判断に適用するが、剛接合の梁やラーメン構造にはそのまま使えない。剛接合をピン接合に変換すると、梁とラーメン構造をトラスモデルに変換できるので、Maxwell's ルールも使えるようになる。

剛接合をピン接合に変換するとは、回転剛性を解放することを意味する。要するに、元々一本の部材（梁か柱か）で部材内部の剛体変位（回転）が生じないが、ピン接合に変換することによって剛体変位（回転）ができるようになる。しかし、解放された回転剛性（曲げモーメント）も未知数としてカウントしないとできない。回転剛性が解放された箇所の数を q とすれば、梁やラーメン構造より変換されたトラスモデルに対して、下記の Maxwell's 条件式がある。

ラーメン構造のための Maxwell's 条件式：

$$m - n \times d + p + q \begin{cases} > 0: \text{不静定かつ安定} \\ = 0: \text{静定かつ安定} \\ < 0: \text{不安定} \end{cases} \quad (5.1)$$

ここで、 m はピン接合による接続されている部材の数、 n は（変換された後の）ピン節点の数、 d は次元、 p は変換された後のトラス構造の反力の数、 q は剛接合をピン接合に変換した数である。

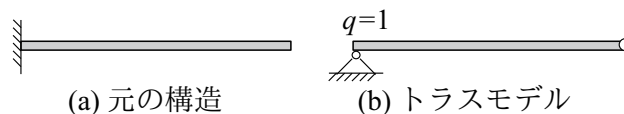


図 5.1 片持梁の静定・安定

例 5.1. 図 5.1(a) の片持梁、図 5.2(a) のゲルバー梁、図 5.3(a) の単純梁に対して、その静定性と安定性を判断してください。

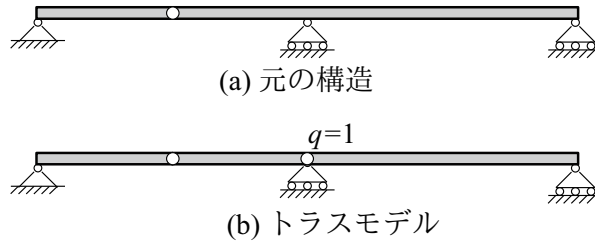


図 5.2 ゲルバー梁の静定性・安定性

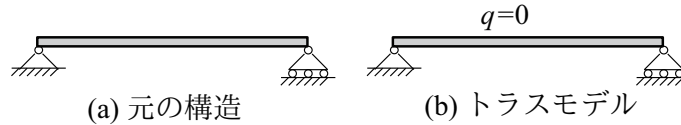


図 5.3 単純梁の静定性と安定性

図 5.1(a) の片持梁に対して、左側の固定支点的回転剛性を解放すると、図 5.1(b) に示すようなトラスモデルとなる。この場合に、一つだけの回転剛性を解放したため、 $q = 1$ となる。また、トラスモデルには、部材が一本 ($m = 1$)、節点が二つ ($n = 2$)、反力が左側のピン支点のみで二つ ($p = 2$) がある。したがって、式 (5.1) のラーメン構造の Maxwell's 条件式に代入すると

$$\begin{aligned} m - n \times d + p + q &= 1 - 2 \times 2 + 2 + 1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

となるので、片持梁は静定かつ安定である。

図 5.2(a) のゲルバー梁を図 5.2(b) のトラスモデルの変換する。ここで、真ん中のローラー支点上の部分の回転剛性が解放されたため、 $q = 1$ である。また、トラスモデルには、部材が三本 ($m = 3$)、節点が四つ ($n = 4$)、反力が合わせて四つ ($p = 4$) がある。したがって、式 (5.1) のラーメン構造の Maxwell's 条件式に代入すると

$$\begin{aligned} m - n \times d + p + q &= 3 - 4 \times 2 + 4 + 1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

となるので、ゲルバー梁は静定かつ安定である。

図 5.3(a) の単純梁と図 5.3(b) のトラスモデルは同じであるため、 $q = 0$ である。また、トラスモデルには、部材が一本 ($m = 1$)、節点が二つ ($n = 2$)、反力が合わせて三つ ($p = 3$) がある。したがって、式 (5.1) のラーメン構造の Maxwell's 条件式に代入すると

$$\begin{aligned} m - n \times d + p + q &= 1 - 2 \times 2 + 3 + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

となるので、単純梁は静定かつ安定である。

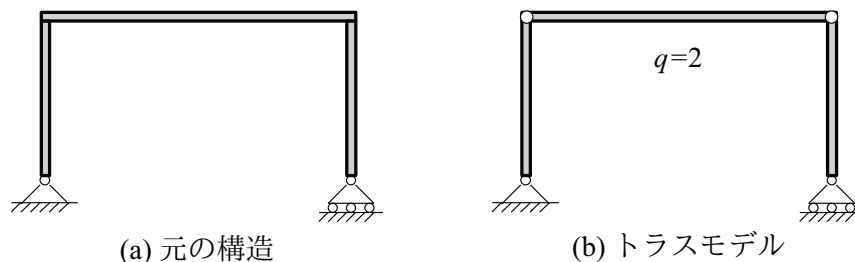


図 5.4 ラーメン構造の静定性と安定性

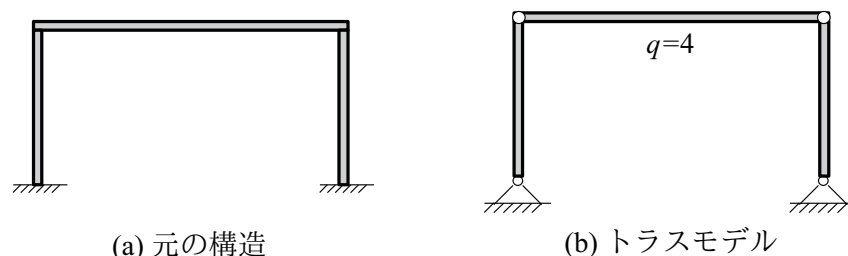


図 5.5 ラーメン構造の静定・安定

例 5.2. 図 5.4(a) および図 5.5(a) に示すラーメン構造の静定・安定の性質を判断してください。

図 5.4(a) のラーメン構造を図 5.4(b) のトラスモデルに変換したところ、二つの剛接合をピン接合に変換したので、 $q=2$ である。また、トラスモデルには、部材が三本 ($m=3$)、節点が四つ ($n=4$)、反力が合わせて三つ ($p=3$) がある。したがって、式 (5.1) のラーメン構造の Maxwell's 条件式に代入すると

$$\begin{aligned} m - n \times d + p + q &= 3 - 4 \times 2 + 3 + 2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

となるので、このラーメン構造は静定かつ安定である。

図 5.5(a) のラーメン構造を図 5.5(b) のトラスモデルに変換したところ、二つの剛接合をピン接合に、しかも二つの固定支点をピン支点に変換したので、 $q=4$ である。また、トラスモデルには、部材が三本 ($m=3$)、節点が四つ ($n=4$)、反力が合わせて四つ ($p=4$) がある。したがって、式 (5.1) のラーメン構造の Maxwell's 条件式に代入すると

$$\begin{aligned} m - n \times d + p + q &= 3 - 4 \times 2 + 4 + 4 \\ &= 3 \end{aligned} \quad (5.6)$$

となるので、このラーメン構造は 3 次不静定であり、安定である。したがって、力およびモーメントの釣合い方程式のみではこのラーメン構造のすべての反力および断面力を求めることができない。

5.2 静定梁

静定梁の断面力を求めるには、普通支点反力を先に求める必要がある。場合によっては、支点反力を求めなくても、次の片持梁のように断面力を直接求められることもある。

解き方としては、梁の適当なところを（仮想的に）切断し、切断面に生じる断面力を釣合い方程式によって求める。しかし、集中力がかかっているところの両側は同じ式で断面力を表現できないため、別々に計算しないとできない。また、トラス構造の場合に、同一部材内部の断面力（軸力）はどこでも同じであるが、梁やラーメン構造の場合には、場所によって断面力（軸力、せん断力、曲げモーメント）が異なるため、なんらかの式で表現することが一般的である。

静定梁の計算手順：

1. 梁の静定性を判断する。
2. 反力を求める。（場合によって省略できる）
3. 集中力を境に計算区間を分ける。

4. 各計算区間において、部材を仮想的に切断し、切断面に断面力の正方向を描く。
5. 切断された部分を対象とし、力およびモーメント釣合い条件により、切断面における断面力を求める。
6. それぞれN図, Q図, M図において、軸力、せん断力および曲げモーメントの梁全体の分布図を描く。

5.2.1 片持梁

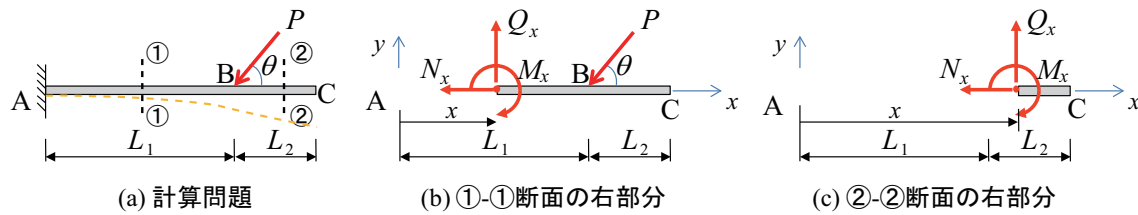


図 5.6 片持梁断面力の計算モデル

例 5.3. 図5.6に示す片持梁の断面力を求めてください。

静定性判定

例 5.3にあったように、片持梁が静定構造である。したがって、力とモーメントの釣合い方程式のみによって反力と断面力を一意に求めることができる。

断面力計算

図5.6の片持梁の B 点に（斜めの）集中力がかかっているため、この梁の計算区間は B 点を境にして AB 間, BC 間という二つの区間に分けられる。適当なところに①-①断面、②-②断面でそれぞれ AB 間と BC 間の部材を仮想的に切断し、断面力の正方向は5.6(b), (c) のように描ける。ここで、切断面の右側を考慮したほうが、反力が入っていないため、反力を先に求めなくても断面力を求めることができる。ようするに、計算手順のステップ 2 が省略できる。

$$\begin{aligned}
 \text{AB 間 (①-①断面):} & \quad \begin{cases} \sum X = -N_x - P \cos \theta = 0 & \implies N_x = -P \cos \theta \\ \sum Y = Q_x - P \sin \theta = 0 & \implies Q_x = P \sin \theta \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x + P \sin \theta (L_1 - x) = 0 & \implies M_x = -P \sin \theta (L_1 - x) \end{cases} \\
 \text{BC 間 (②-②断面):} & \quad \begin{cases} \sum X = -N_x = 0 & \implies N_x = 0 \\ \sum Y = Q_x = 0 & \implies Q_x = 0 \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x = 0 & \implies M_x = 0 \end{cases} \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

ここで、 M_x を時計回りを正方向（図5.6(c)によると下側は引張側となる）として計算しているので、計算結果は負となるというのは、実際に生じるこの計算空間における曲げモーメントが反時計まわりとなり、梁の上側は引張側となることを意味する。

断面力は、左端 A 点 ($x = 0$)、B 点 ($x = L_1$)、右端 C 点 ($x = L_1 + L_2$) といった代表点における値を下の表でまとめる。

| 断面力 | 左端 A 点 ($x = 0$) | B 点 ($x = L_1$) | 右端 C 点 ($x = L_1 + L_2$) |
|-----------------|---------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 軸力 (N) | $-P \cos \theta$ | $-P \cos \theta$ (左), 0 (右) | 0 |
| せん断力 (Q) | $P \sin \theta$ | $P \sin \theta$ (左), 0 (右) | 0 |
| 曲げモーメント (M) | $-PL_1 \sin \theta$ | 0 | 0 |

(5.8)

■ また、その分布図でまとめると、図5.7で描く。

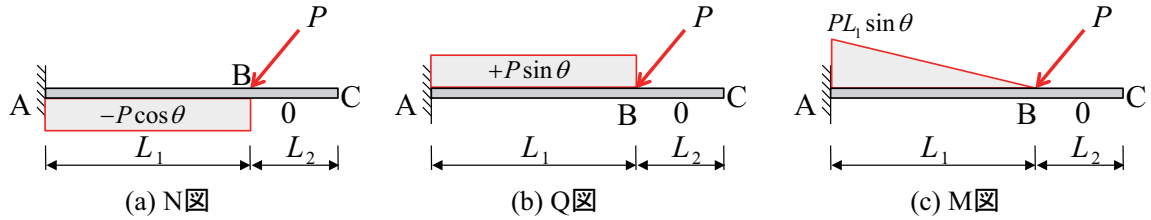


図 5.7 片持梁断面力の分布図

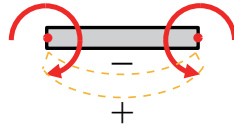


図 5.8 曲げモーメントによる変形

断面力の分布図を描くときに、軸力とせん断力には正方向が決められているため、符号を明記すれば、その分布図は梁の上側か下側かどっちに描いても構わない。しかし、曲げモーメントは引張側に描かないとできない。曲げモーメントによる部材の変形図は図5.8で表す。

曲げモーメントは引張側に描く理由としては、構造設計において、引張応力と圧縮応力が生じる場所の設計基準が異なる。特に、鉄筋コンクリート構造 (RC: Reinforced Concrete) の場合に、コンクリートの引張強度はその圧縮強度の十分の一しかないため、コンクリートに引張応力が生じると、すぐにひび割れができてしまう。そのため、鉄筋コンクリートには、一体化されている鉄筋の引張強さを活かして、引張応力を鉄筋に負担させる仕組みとなっている。たとえば、図5.9は、異なる載荷点および配筋量により、鉄筋コンクリート単純梁のひび割れへの影響を調べるため、構造試験を行った後の写真である。それに関する解説は、単純梁の断面力計算の後に譲る。

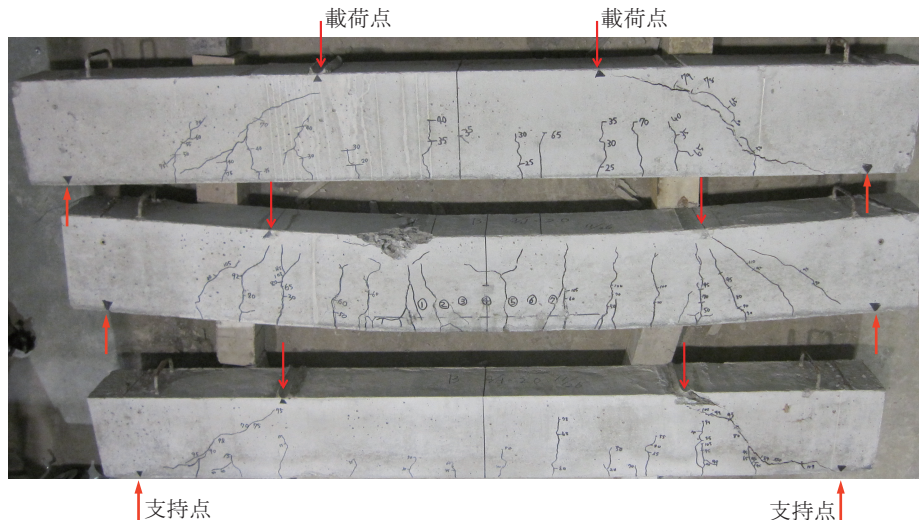


図 5.9 異なる載荷点および配筋量より曲げモーメントを受ける鉄筋コンクリート単純梁のひび割れへの影響

5.2.2 単純梁

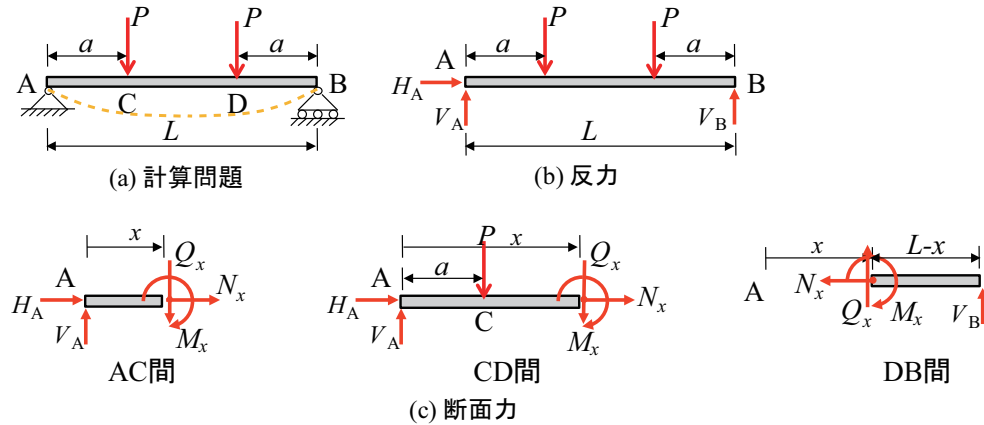


図 5.10 単純梁断面力の計算モデル

例 5.4. 図5.10に示す単純梁の断面力を求めてください。

静定性判定

例 5.3にあったように、単純梁が静定構造である。したがって、力とモーメントの釣合い方程式のみによって反力と断面力を一意に求めることができる。

反力計算

とりあえず分布荷重を集中荷重に変換し、図5.10(b)の計算モデルによって、支点反力を求める。

$$\begin{aligned} \sum X = H_A = 0 & \implies H_A = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} = Pa + P(L-a) - V_B L = 0 & \implies V_B = P \quad (\uparrow) \\ \sum Y = V_A + V_B - P - P = 0 & \implies V_A = 2P - V_B = P \quad (\uparrow) \end{aligned} \quad (5.9)$$

断面力計算

梁に二つの集中荷重がかかっているため、図 5.10(c) に示すように AC 間、CD 間、DB 間三つの計算空間に分けられる。したがって、断面力を求めるために、各計算空間において梁を適当なところで仮想的に切断し、各断面力の正方向は図5.10(c)のように描ける。ここで、 x とは原点 A からの距離である。

各計算空間において、釣合い方程式により断面力を求めると、以下のような計算となる。ただし、DB 間の計算に対しては、切断面の右側を対象としている。

$$\begin{aligned} \text{AC 間}(0 \leq x < a) & \begin{cases} \sum X = N_x + H_A = 0 \implies N_x = -H_A = 0 \\ \sum Y = V_A - Q_x = 0 \implies Q_x = V_A = P \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = V_A x + M_x = 0 \implies M_x = -V_A x = -Px \end{cases} \\ \text{CD 間}(a < x < L-a) & \begin{cases} \sum X = H_A + N_x = 0 \implies N_x = -H_A = 0 \\ \sum Y = -Q_x + V_A - P = 0 \implies Q_x = V_A - P = 0 \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x + V_A x - P(x-a) = 0 \implies M_x = P(x-a) - V_A x = -Pa \end{cases} \\ \text{DB 間}(L-a < x \leq L) & \begin{cases} \sum X = -N_x = 0 \implies N_x = 0 \\ \sum Y = Q_x + V_B = 0 \implies Q_x = -V_B = -P \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x - V_B(L-x) = 0 \implies M_x = V_B(L-x) = P(L-x) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

断面力は、左端 ($x=0$)、中央点 ($x=L/2$)、右端 ($x=L$) といった代表点においての値は

| 断面力 | 左端 A 点($x=0$) | 中央点($x=L/2$) | 右端 B 点($x=L$) |
|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 軸力(N) | 0 | 0 | 0 |
| せん断力(Q) | P | 0 | $-P$ |
| 曲げモーメント(M) | 0 | $-Pa$ | 0 |

(5.11)

■ となり、その分布図は図5.11にまとめている。

例 5.4は図5.9に示す構造実験の計算問題である。図 5.11の断面力分布図と比較すると、以下のことが分かる。

- 集中荷重の間に、せん断力がゼロとなるが、曲げモーメントが一致となっている。したがって、RC 梁も載荷点の間に（下側に）材軸と直交する方向にひび割れが発生する。
- 載荷点と支持点の距離が短くなると、せん断力が変わらないが、最大の曲げモーメントが減少する。したがって、距離が短くなるとともに、載荷点の間に曲げひび割れよりも、支持点と載荷点の間に斜めのせん断ひび割れが発生し、最終的に曲げ破壊ではなく、せん断破壊となる。

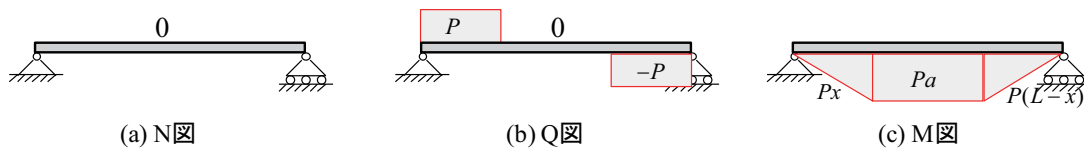


図 5.11 単純梁断面力の分布図

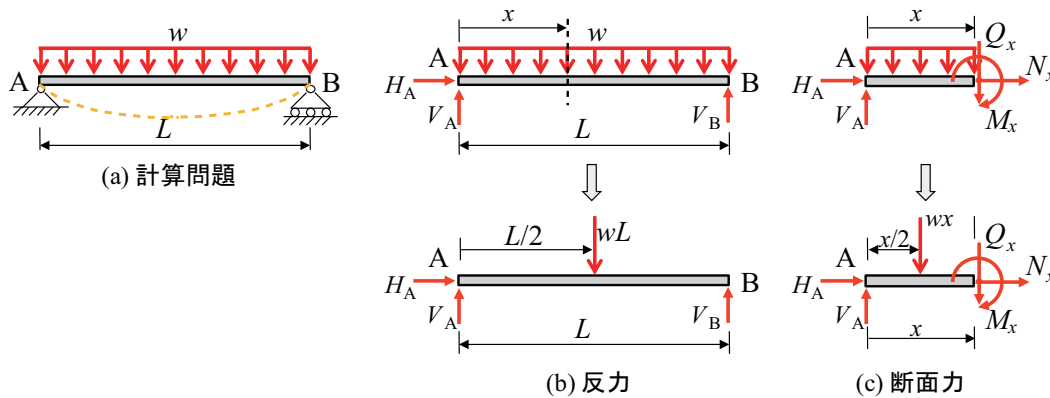


図 5.12 単純梁断面力の計算モデル

例 5.5. 図5.12に示す単純梁の断面力を求めてください。

静定性判定

例 5.3にあったように、単純梁が静定構造である。したがって、力とモーメントの釣合い方程式のみによって反力と断面力を一意に求めることができる。

反力計算

とりあえず分布荷重を集中荷重に変換し、図5.12(b)の計算モデルによって、支点反力を求める。

$$\begin{aligned}
 \sum X = H_A = 0 & \implies H_A = 0 \\
 \sum M_{A \text{ 点まわり}} = (wL)\frac{L}{2} - V_B L = 0 & \implies V_B = \frac{wL}{2} \quad (\uparrow) \\
 \sum Y = V_A + V_B - P = 0 & \implies V_A = P - V_B = \frac{wL}{2} \quad (\uparrow)
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

断面力計算

梁に集中荷重がかかっていないため、計算区間は一つしかない。したがって、断面力を求めるために、梁を適当なところで仮想的に切断し、各断面力の正方向は図5.12(c)のように描ける。ここで、切断面の左側を考え、A 点を x 軸の原点とする局所座標系を取る。

取りだした部分の分布荷重を集中荷重に変換し、釣合い方程式によって断面力を求めると、以下のような計算となる。

$$\begin{aligned}
 \sum X = N_x + H_A = 0 & \implies N_x = -H_A = 0 \\
 \sum Y = V_A - Q_x - wx = 0 & \implies Q_x = V_A - wx = \frac{w}{2}(L - 2x) \\
 \sum M_{\text{切断面まわり}} = V_A x - (wx)\frac{x}{2} + M_x = 0 & \implies M_x = -V_A x + \frac{wx^2}{2} = \frac{-wLx + wx^2}{2}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

ここで、 M_x を時計回りを正（図5.12(c)によると上側は引張側となる）として計算しているの
で、計算結果は負となるというのは、梁の下側は引張側となることを意味する。

断面力は、左端 ($x=0$)、中央点 ($x=L/2$)、右端 ($x=L$) といった代表点においての値は

| 断面力 | 左端 A 点($x=0$) | 中央点($x=L/2$) | 右端 B 点($x=L$) |
|----------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| 軸力(N) | 0 | 0 | 0 |
| せん断力(Q) | $\frac{wL}{2}$ | 0 | $-\frac{wL}{2}$ |
| 曲げモーメント(M) | 0 | $-\frac{wL^2}{8}$ | 0 |

(5.14)

となり、その分布図は図5.13にまとめている。ここで注意してほしいのは、せん断力は x の一
次関数で、曲げモーメントは x の二次関数である。

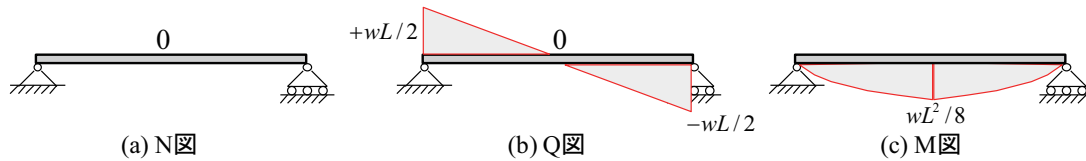


図 5.13 単純梁断面力の分布図

5.2.3 ゲルバー梁 (Gerber Beam)

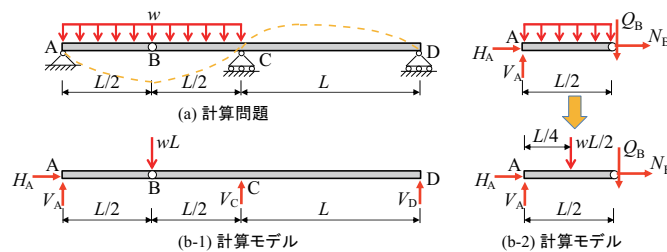


図 5.14 例題：ゲルバー梁の反力

例 5.6. 図5.14(a) のゲルバー梁の断面力を求めてください。

反力は四つがあるため、構造物全体の釣合い方程式だけでは解けない。ただし、3 ヒンジ
ラーメン構造と同じように、B 点のピン接合において曲げモーメントはゼロであることを利用
すれば、もう一つの方程式が得られる。

反力計算：

図5.14(b-1) と (b-2) の計算モデルによって、釣合い方程式は以下のようにまとめられる。

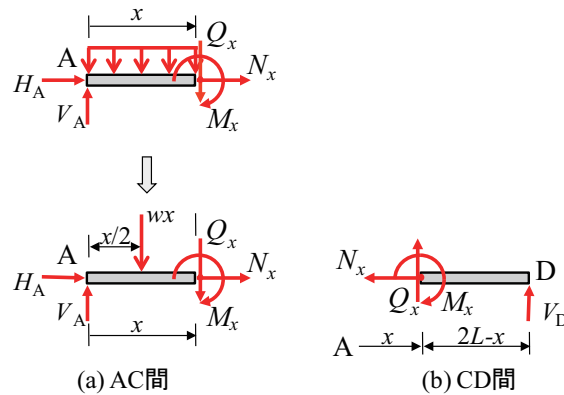


図 5.15 例題：ゲルバー梁の断面力

$$\begin{aligned}
 \sum X = H_A = 0 & \implies H_A = 0 \\
 (b-2) : \sum M_B \text{点まわり} = V_A(L/2) - (wL/2)(L/4) = 0 & \implies V_A = wL/4 (\uparrow) \\
 (b-1) : \sum M_D \text{点まわり} = V_A(2L) + V_C L - (wL)(3L/2) = 0 & \implies V_C = 3wL/2 - 2V_A = wL (\uparrow) \\
 \sum Y = V_A + V_C + V_D - wL = 0 & \implies V_D = wL - V_A - V_C = wL - wL/4 - wL = -wL/4 (\downarrow)
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

断面力計算：

ゲルバー梁の断面力を求めるには、図5.15に示す AC 間と CD 間の計算モデルを考える。ここで、計算上便宜のため、AC 間は切断面の左部分、CD 間は切断面の右部分を対象とし、A 点を局所座標系の原点とする。

$$\begin{aligned}
 \text{AC 間}(0 \leq x \leq L) & \begin{cases} \sum X = N_x + H_A = 0 & \implies N_x = H_A = 0 \\ \sum Y = V_A - wx - Q_x = 0 & \implies Q_x = V_A - wx = \frac{wL}{4} - wx \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = V_A x - wx(x/2) + M_x = 0 & \implies M_x = -V_A x + wx^2/2 = -\frac{wLx}{4} + \frac{wx^2}{2} \end{cases} \\
 \text{CD 間}(L < x \leq 2L) & \begin{cases} \sum X = -N_x = 0 & \implies N_x = 0 \\ \sum Y = Q_x + V_D = 0 & \implies Q_x = -V_D = \frac{wL}{4} \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x - V_D(2L - x) = 0 & \implies M_x = V_D(2L - x) = -\frac{wL^2}{2} + \frac{wL}{4}x \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

AC 間において、曲げモーメントの極限（極小、極大）値はその一回微分（勾配、せん断力）がゼロになるところである。

$$\frac{dM_x}{dx} = -\frac{wL}{4} + wx = 0 \implies x = \frac{L}{4}
 \tag{5.17}$$

断面力は、A 点 ($x=0$)、極限值 ($x=L/4$)、B 点 ($x=L/2$)、C 点 ($x=L$)、D 点 ($x=2L$) といった代表点においての値は

| 断面力 | A 点($x=0$) | 極限值($x=L/4$) | B 点($x=L/2$) |
|----------------|----------------|--------------------|-----------------|
| 軸力(N) | 0 | 0 | 0 |
| せん断力(Q) | $\frac{wL}{4}$ | 0 | $-\frac{wL}{4}$ |
| 曲げモーメント(M) | 0 | $-\frac{wL^2}{32}$ | 0 |

| 断面力 | C 点($x=L$) | D 点($x=2L$) |
|----------------|---|----------------|
| 軸力(N) | 0 | 0 |
| せん断力(Q) | $-\frac{3wL}{4}$ (左)、 $\frac{wL}{4}$ (右) | $\frac{wL}{4}$ |
| 曲げモーメント(M) | $\frac{wL^2}{4}$ (左)、 $-\frac{wL^2}{4}$ (右) | 0 |

となり、その分布図は図5.16にまとめている。ここで、注意してほしいのは、AC 間のせん断力は x の一次関数で、その曲げモーメントは x に関する二次関数である。また、CD 間のせん

断力は定数で、その曲げモーメントは x に関する一次関数である。C 点において集中力（反力）がかかるので、C 点左右のせん断力が異なるが、その曲げモーメントが同じであることに注意してほしい。

図5.16(c)のM図によると、ピン支点のA点、D点、およびピン接合のB点においては、その曲げモーメントはゼロであることも確認できる。

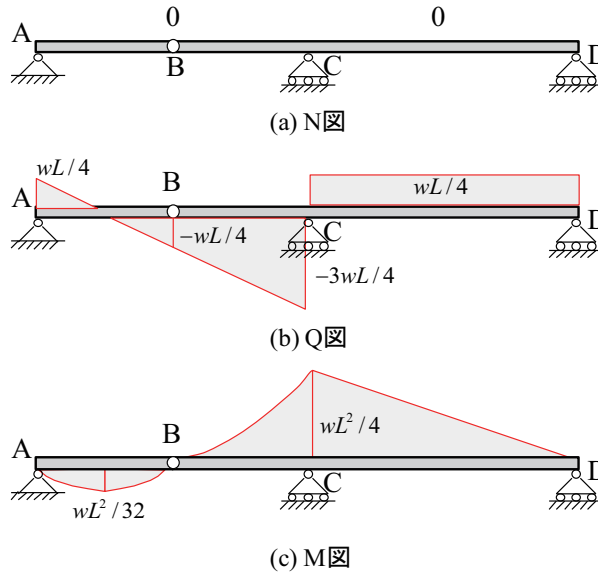


図 5.16 例題：ゲルバー梁の断面力分布図

5.3 M-Q 関係

この章の例題では、何回も出てきたが、曲げモーメントの次数はちょうどせん断力の次数より一次高い。これは偶然な関係ではなく、必然な関係であるため、この節でそれを証明する。

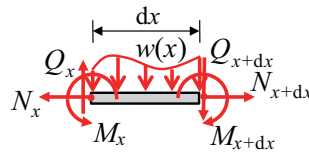


図 5.17 M-Q 関係：微小な断片

図5.17に示す無限小の長さ dx を有する梁断片を考える。垂直方向の力の釣合い方程式によって、

$$\begin{aligned} \sum Y &= Q_x - w(x)dx - Q_{x+dx} = 0 \\ \Rightarrow w(x) &= -\frac{Q_{x+dx} - Q_x}{dx} = -\frac{dQ}{dx} \end{aligned} \quad (5.19)$$

が分かる。ここで、長さは無限小であるため、分布荷重の変化を無視した。この式によっては、分布荷重はせん断力の一回微分である。したがって、等分布荷重（0次関数）の場合には、せん断力の分布は一次関数、等変分布荷重（一次関数）の場合には、せん断力の分布は二次関数とな

ることが分かる。もっと一般的にまとめると、分布荷重は n 次関数の場合には、せん断力の分布は $n+1$ 次関数となる。

さらに、断片の右端まわりのモーメントの釣合い方程式によって、

$$M_{\text{右端まわり}} = -M_x + M_{x+dx} - w(x)dx^2/2 + Q_x dx = 0$$

$$\Rightarrow Q_x = -\frac{M_{x+dx} - M_x}{dx} + w(x)dx/2 = -\frac{dM}{dx} \tag{5.20}$$

が分かる。ここで、 dx が無限小であるため、 $w(x)dx/2$ をゼロとして消えた。この式によつては、せん断力は曲げモーメントの一回微分である。したがって、せん断力はコンスタント（0次関数）の場合に、曲げモーメントの分布は一次関数、せん断力は一次関数の場合に、曲げモーメントの分布は二次関数となることが分かる。もっと一般的にまとめると、せん断力は n 次関数の場合には、曲げモーメントの分布は $n+1$ 次関数となる。さらに、せん断力はゼロの場合には、曲げモーメントは極限（極小か極大）値をとる。

上記の二式によつては、分布荷重と曲げモーメントの関係

$$w(x) = \frac{d^2 M}{dx^2} \tag{5.21}$$

が得られる。

この節の関係式は、得られた断面力の分布はあっているかに対して、簡単に検証できる。

まとめとして、分布荷重、せん断力および曲げモーメントの次数の間に以下の対応関係がある。

分布荷重、せん断力および曲げモーメントの関係：

| 分布荷重の次数 | せん断力の次数 | 曲げモーメントの次数 | 荷重種類 |
|---------|---------|------------|--------|
| -1 | 0 | 1 | 集中荷重 |
| 0 | 1 | 2 | 等分布荷重 |
| 1 | 2 | 3 | 等辺分布荷重 |
| 2 | 3 | 4 | |
| n | $n+1$ | $n+2$ | |

(5.22)

5.4 ラーメン構造の断面力分布

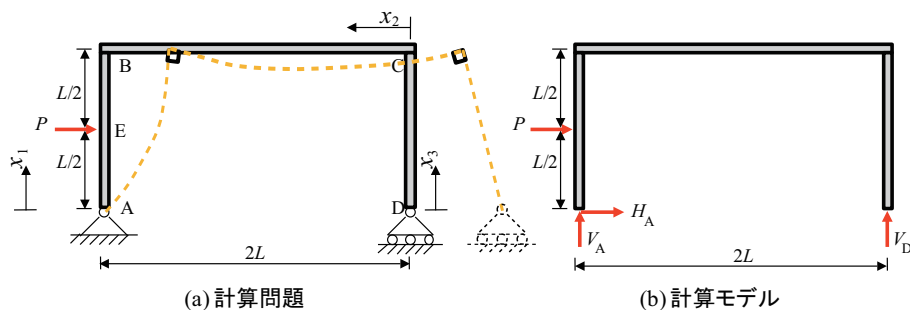


図 5.18 例題：静定ラーメン構造の反力計算モデル

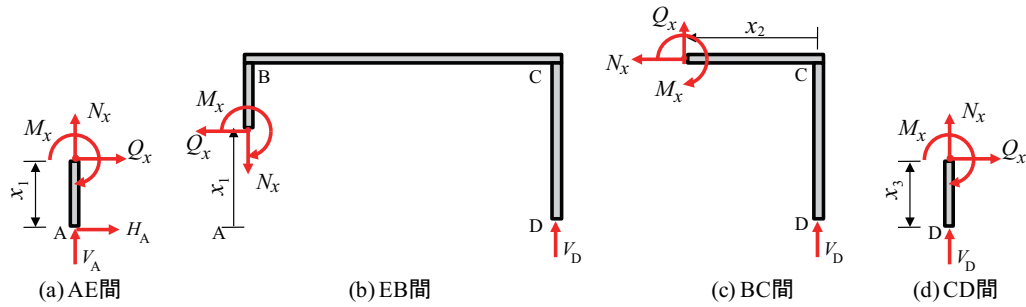


図 5.19 例題：静定ラーメン構造の断面力計算モデル

例 5.7. 図5.18(a) に示すようなラーメン構造の断面力を求めてください。

反力は図5.18(b) のモデルによって以下のように計算できる。

反力計算：

$$\begin{aligned} \sum X = H_A + P = 0 & \implies H_A = -P (\leftarrow) \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} = P(L/2) - V_D(2L) = 0 & \implies V_D = P/4 (\uparrow) \\ \sum Y = V_A + V_D = 0 & \implies V_A = -V_D = -P/4 (\downarrow) \end{aligned} \quad (5.23)$$

部材 AB の間に、集中力がかかっているため、部材 AB を AE 間と EB 間に分けられる。それ以外の部材の中に集中力がないため、それぞれの計算区間は BC 間と CD とする。また、各計算区間における局所座標系の取り方は、図5.18(a) に示す。

静定ラーメン構造の断面力は、図5.19に示す各計算区間の計算モデルによって、以下のよう求められる。

断面力計算：

$$\begin{aligned} \text{AE 間}(0 \leq x_1 \leq L/2) & \begin{cases} \sum Y = N_x + V_A = 0 & \implies \underline{N_x} = -V_A = P/4 \\ \sum X = Q_x + H_A = 0 & \implies \underline{Q_x} = -H_A = P \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_{x_1} - H_A x_1 = 0 & \implies \underline{M_x} = H_A x_1 = -P x_1 \end{cases} \\ \text{EB 間}(L/2 < x_1 \leq L) & \begin{cases} \sum Y = -N_x + V_D = 0 & \implies \underline{N_x} = V_D = P/4 \\ \sum X = -Q_x = 0 & \implies \underline{Q_x} = 0 \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x - V_D(2L) = 0 & \implies \underline{M_x} = V_D(2L) = PL/2 \end{cases} \\ \text{BC 間}(0 \leq x_2 \leq 2L) & \begin{cases} \sum X = -N_x = 0 & \implies \underline{N_x} = 0 \\ \sum Y = Q_x + V_D = 0 & \implies \underline{Q_x} = -V_D = -P/4 \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x - V_D x_2 = 0 & \implies \underline{M_x} = V_D x_2 = P x_2 / 4 \end{cases} \\ \text{CD 間}(0 \leq x_3 \leq L) & \begin{cases} \sum Y = N_x + V_D = 0 & \implies \underline{N_x} = -V_D = -P/4 \\ \sum X = Q_x = 0 & \implies \underline{Q_x} = 0 \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} = M_x = 0 & \implies \underline{M_x} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.24)$$

断面力の分布は図5.20に示す。

5.5 計算結果の検算

梁とラーメン構造の反力および断面力計算にはそこそこの計算量があるので、途中の計算ミスも入ってしまう可能性がある。しかし、支点の種類や接合部の種類や M-Q 関係などすでに分かっていた力学的特性を利用すれば、そういう計算ミスを見抜きだすことができる。具体的には、断面力の分布図を用いて下記の三項目で確認する。

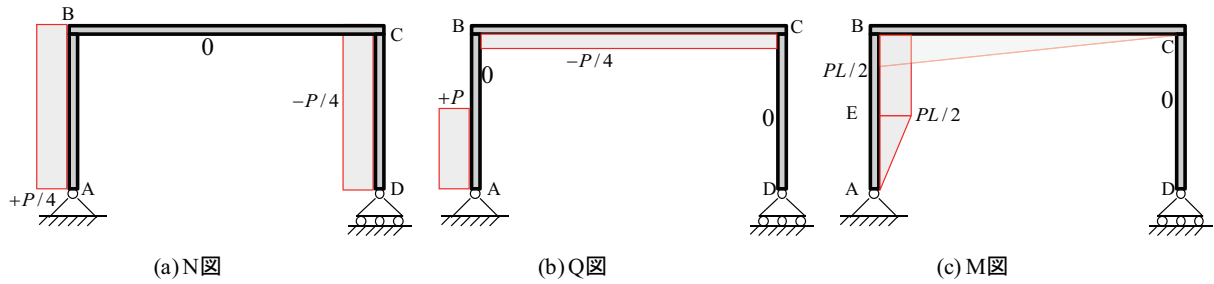


図 5.20 例題：静定ラーメン構造の断面力計算モデル

断面力計算結果検算の三項目：

- ピン支点またはピン接合部の曲げモーメントがゼロになっているか。
- 曲げモーメントの分布が連続しているか。
- 曲げモーメント分布図とせん断力分布図の間に式 (5.20) にまとめた M-Q 関係を満足しているか。

5.6 宿題

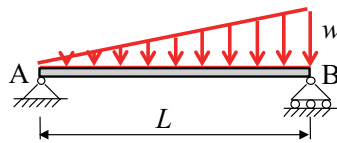


図 5.21 等変分布荷重が作用している単純梁

Exercise 5.1. 図 5.21に示すような等変分布荷重が作用している単純梁に対して

1. 変形図を描いてください。
2. 静定性を特定してください。
3. 断面力分布を求めてください。
4. 断面力の分布図を描いてください。

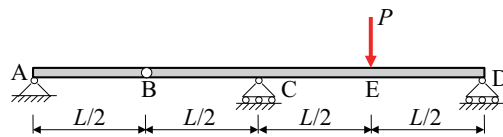


図 5.22 ゲルバー梁

Exercise 5.2. 図 5.22に示すようなゲルバー梁に対して

1. 変形図を描いてください。

2. 静定性を特定してください。
3. 断面力分布を求めてください。
4. 断面力の分布図を描いてください。

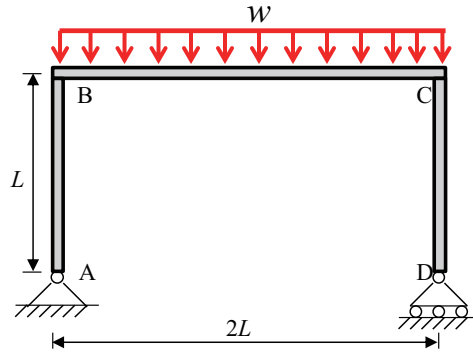


図 5.23 ラーメン構造

Exercise 5.3. 図 5.23に示すようなラーメン構造に対して

1. 変形図を描いてください。
2. 静定性を特定してください。
3. 断面力分布を求めてください。
4. 断面力の分布図を描いてください。

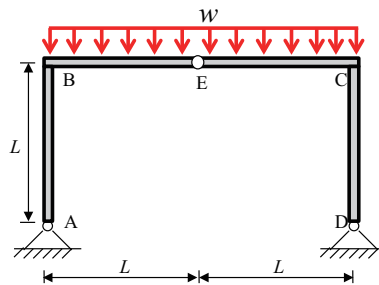


図 5.24 3ヒンジラーメン構造

Exercise 5.4. 図 5.24に示すような3ヒンジラーメン構造に対して

1. 変形図を描いてください。
2. 静定性を特定してください。
3. 断面力分布を求めてください。
4. 断面力の分布図を描いてください。

Chapter 6 応力と断面性質

Abstract 本章では、断面に生じる応力の定義と求め方、更に断面の各性質および応力を使った構造設計法の基本について説明する。

6.1 応力とひずみ

いままでの内容は、断面の形状を無視し（直線に簡略し）、断面全体にわたっての力の総和（断面力）を求めてきた。しかし、構造物の破壊は、部材（の断面）が一気に壊れるのではなく、断面において最も危ないところ（局所）から始まる。断面力は断面全体の力状況を反映するので、部材の安全性を検討するのに、情報は不足であり、断面の局所における力の状況を反映できる応力で検討する必要がある。

応力 (Stress) とは、微小面積に作用する単位面積当たりの力を表すものである。また、応力に対応している微小面積における変形を表すものはひずみ (歪・Strain) である。

6.1.1 応力

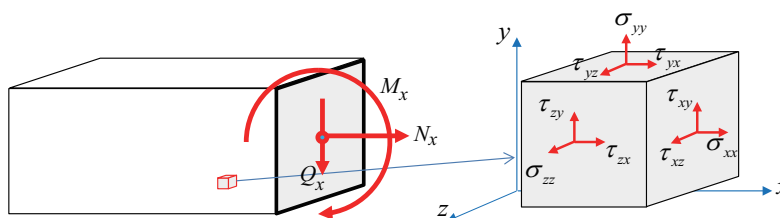


図 6.1 構造物の微小部分における応力

図6.1では、部材の中から仮想的に切り出された微小の部分（立方体）における応力を示している。応力は大きく分けると、下記の二種類がある。

応力の種類

- 垂直応力 (Normal Stress、 σ) : 切断面に垂直する応力。
- せん断応力 (Shear Stress、 τ) : 切断面内にある応力であり、面内には直交する二つのせん断応力がある。

あわせて、立方体に作用している応力は以下の六つの独立成分がある。

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \quad (6.1)$$

ここで証明が省略するが、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ という関係式が分かっている。

応力には、正負という方向性を持つが、その大きさを表す場合には応力度というものが使われている。要するに、応力度は応力の絶対値である。

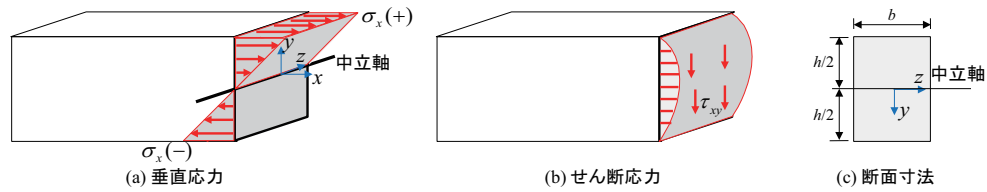


図 6.2 梁の切断面における応力分布

断面力は、実はこれらの応力の断面全体にわたる力（モーメント）の総和である。例えば、図6.2は梁の断面における応力分布を示している。（ここで、局所座標系の正方向を注意してください。後で曲げモーメントによる垂直応力および梁の変形の定式化のため、下向きを y -軸の正方向としている。）梁断面の上半分は引張側（垂直応力は正）で、下半分は圧縮側（垂直応力は負）である。その境目にあるのは、中立軸 (Neutral Axis) である。したがって、中立軸においては、垂直応力はゼロである。後で理由を説明するが、垂直応力の分布は線形的な関係となっている。

断面力 N_x, Q_x, M_x と垂直応力 σ_x （または簡単に σ ）およびせん断応力 τ_{xy} （または τ ）の関係は、下記の式で表すことができる。

$$\begin{aligned} N_x &= \sum \sigma \Delta A = \int \sigma dA (= \int \int \sigma dz dy) \\ M_x &= \sum (\sigma \Delta A) y = \int \sigma y dA (= \int \int \sigma y dz dy) \\ Q_x &= \sum \tau \Delta A = \int \tau dA (= \int \int \tau dz dy) \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで、中立軸よりの距離を y とする。上記の式からでも分かるように、垂直応力 σ は軸力と曲げモーメント M_x によるものであり、せん断応力 τ はせん断力 Q_x によるものである。

6.1.2 ひずみ

ひずみ (Strain) は変形の比率を表すもので、単位長さあたり変形の量で定義される。ひずみも二種類で、それぞれ応力に対応して垂直ひずみ ε とせん断ひずみ γ がある。

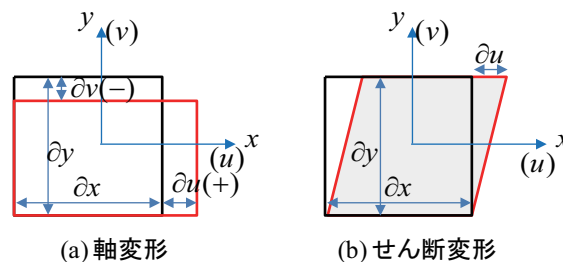


図 6.3 断片の変形

構造の断片の変形 (Deformation) は図6.3に示す。垂直ひずみ (ϵ_x, ϵ_y) とせん断ひずみ (γ) はそれぞれ以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (6.3)$$

ここで、 u と v はそれぞれ x -, y -方向の変位である。

両方向の垂直ひずみの間に、材料によってその比が大体決められている。この比は、ポアソン比 ν (Poisson's Ratio) と呼び、以下のように定義する。

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}\quad (6.4)$$

ここで、マイナスが付いていることを注意してください。鋼材 (鉄) の場合は 0.3、コンクリートの場合は 0.18~0.2 ぐらいである。

応力とひずみの間には、以下のような線形的関係がある。

$$\begin{aligned}\sigma &= E\epsilon \\ \tau &= G\gamma\end{aligned}\quad (6.5)$$

ここで、 E はヤング係数 (Young's Modulus) で、 G はせん断弾性係数 (Shear Modulus) である。

実は、この式はフックの法則 $f = kx$ と似ている。 E と G はバネ定数 k に対応し、材料の「変形しにくさ」(バネの硬さ) を表すものである。鉄の場合、 $E_s = 205\text{kN/mm}^2$ で、コンクリートはその 1/10 程度で、 $E_c = 18 \sim 20\text{kN/mm}^2$ である。

証明は省略するが、 E と G の間には、ポアソン比 ν を経由して以下の関係式がある。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\quad (6.6)$$

6.1.3 モールの応力円

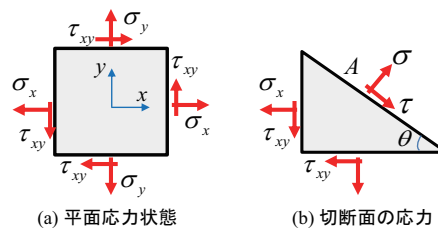


図 6.4 平面応力状態における応力分布

モールの応力円 (Mohr's stress circle) とは、物体内の応力状態を図示するときに現れる円である。

平面応力状態において、局所的に働いている垂直応力 σ_x, σ_y およびせん断応力 τ_{xy} は図 6.4(a) に示す。その一部分を (b) のように切断すると、切断面における垂直応力 σ とせん断応力 τ が表に出てくる。

切断面における垂直応力 σ とせん断応力 τ に対して、 x, y 方向の釣合い方程式は以下になる。

$$\begin{aligned}\sum X &= (A\sigma) \sin \theta + (A\tau) \cos \theta - \sigma_x(A \sin \theta) - \tau_{xy}(A \cos \theta) = 0 \\ \sum Y &= (A\sigma) \cos \theta - (A\tau) \sin \theta - \sigma_y(A \cos \theta) - \tau_{xy}(A \sin \theta) = 0\end{aligned}\quad (6.7)$$

ここで、 A は切断面の面積である。上の式を整理すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma \sin \theta + \tau \cos \theta &= \sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \\ \sigma \cos \theta - \tau \sin \theta &= \sigma_y \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta\end{aligned}\quad (6.8)$$

さらに、上の一番目の式に $\sin \theta$ を掛けたものが、二番目の式に $\cos \theta$ を掛けたものを足すと、 σ が求められる。また、一番目の式に $\cos \theta$ を掛けたものが、二番目の式に $\sin \theta$ を掛けたものを引くと、 τ が求められる。その結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau &= \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (6.9)$$

ここで、以下の三角関数を利用した。

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\end{aligned}\quad (6.10)$$

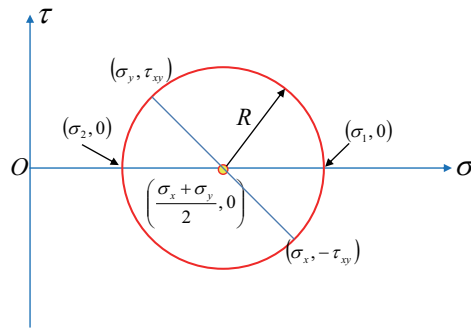


図 6.5 モールの応力円

式 (6.9) の二つの式の二乗和は以下の円に関する方程式としてまとめられる。

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 = R^2\quad (6.11)$$

式 (6.11) で定義された円の中心は $((\sigma_x + \sigma_y)/2, 0)$ にあり、その半径 R は $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2}$ となる。その円はモールの応力円と呼ばれ、図 6.5 にその形状を示す。

また、最大と最小の応力は $\sigma_{1,2}$ はそれぞれ以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R\end{aligned}\quad (6.12)$$

この時のせん断応力はゼロとなり、 $\sigma_{1,2}$ は主応力とも呼ばれる。また、せん断応力の最大値は R であり、その時の垂直応力は $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ である。

鉄筋コンクリート造の建物には、引張応力が鉄筋で負担しているため、主応力の方向に沿って鉄筋を配置する必要がある。そのため、(最大)主応力の分布を求めるのは重要となる。

6.2 構造設計の基本

6.2.1 材料強度

材料強度とは、材料が破壊するまでにどのぐらいの応力を耐えられるかという指標である。普通は、圧縮か引張実験でその材料強度を決める。

鉄の場合には、いろいろ種類があるが、引張強度も圧縮強度も大体 $400 \sim 570 \text{N/mm}^2$ ぐらいで、コンクリートの圧縮強度は $15 \sim 27 \text{N/mm}^2$ 程度であり、その引張強度は圧縮強度の $1/10$ ぐらいで、実際の構造設計では無視されることが多い。

6.2.2 構造設計の理念（一次設計）

構造設計にはいくつかの理念の異なる設計法があるが、基本的な考え方としては、構造物の内部に生じる最大（垂直・せん断）応力度 $|\sigma|_{\max}, |\tau|_{\max}$ は許容（許される）応力度 $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ を超えないこと（いわゆる許容応力度設計法¹⁾）である。ようするに、以下の式で構造物の設計は設計要求を満足するかどうかを判断する。

$$\begin{aligned}|\sigma|_{\max} &\leq \bar{\sigma} \\ |\tau|_{\max} &\leq \bar{\tau}\end{aligned}\quad (6.13)$$

許容応力度は、材料の基準強度（鉄は降伏強度、コンクリートは圧縮強度）を安全率の比で決められる。詳細については、3年生前期の「建築構造計画学」で詳しく説明する。

6.3 断面力と応力

6.3.1 軸力による垂直応力

トラス構造の部材には、曲げモーメントとせん断力もゼロであるため、そのせん断応力はゼロ ($\tau = 0$)、切断面における垂直応力はどこでも一緒なので、軸力は

$$N_x = \sum \sigma \Delta A = \int \sigma dA = \sigma \int dA = \sigma A \quad (6.14)$$

となる。ここで、 A は部材の断面積である。

¹⁾ 一次設計（許容応力度設計）においては中小規模の地震に対応し、構造物には損傷が生じないことは設計指標となる。それに対して、二次設計（終局耐力設計）においては大規模の地震に対応し、構造物には損傷があってもいいが、倒壊しないことは設計指標となる。

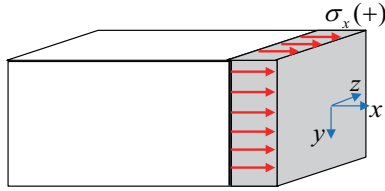


図 6.6 トラスの切断面における応力分布

したがって、軸力による垂直応力は

$$\sigma = \frac{N_x}{A} \quad (6.15)$$

で計算できる。

6.3.2 曲げモーメントによる垂直応力

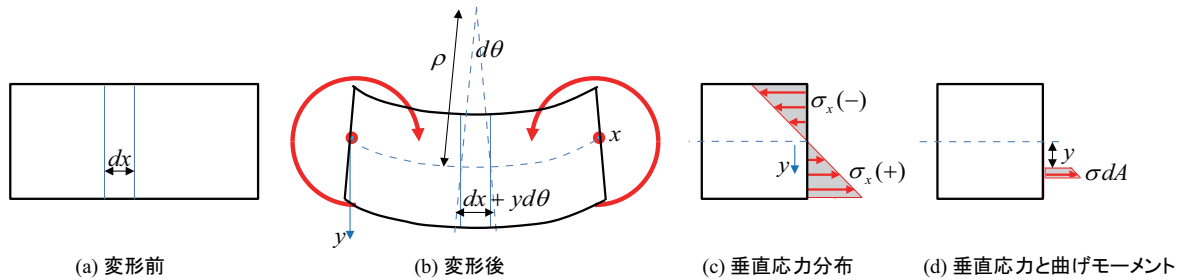


図 6.7 曲げモーメントによる垂直応力

曲げモーメントと垂直応力との関係は自明ではないが、平面保持の仮定を採用することによって、何らかの式で表すことができる。平面保持というのは、曲げによる変形前後において切断面は平面を保持することである。

例えば、図6.7に示す曲げモーメントのみを受ける梁を考える。平面保持の仮定により、変形前に材軸方向と直交する方向の直線は、変形後も直線となっている。伸び縮みのない中立軸より距離 y においては、変形前の長さ dx は、変形後の $dx + yd\theta$ となる。したがって、切断面における垂直ひずみ ϵ_y （簡単のため以下は ϵ とする）は

$$\epsilon = \frac{(dx + yd\theta) - dx}{dx} = \frac{d\theta}{dx} y = \phi y \quad (6.16)$$

となる。ここで、 ϕ は、角度の変化率を表す曲率である。ちなみに、曲率半径 ρ は曲率の逆数である。

$$\rho = \frac{1}{\phi} \quad (6.17)$$

中立軸より y の距離における垂直応力は、

$$\sigma = E\epsilon = E\phi y \quad (6.18)$$

で書ける。上の式によると、曲げによる垂直応力分布は、垂直ひずみと同じように、中立軸よりの距離と線形的な関係を持つ。その分布は、図6.7(c)に示す。ようするに、中立軸では、垂直ひずみも垂直応力もゼロである。

また、同じ切断面において、曲率は不変であるため、中立軸まわりのモーメントは

$$M = \int \sigma y dA = \int E \phi y^2 dA = E \phi \int y^2 dA = E \phi I_z \quad (6.19)$$

で書ける。ここで、 I_z は断面性質を表す指標の一つ、 z -軸まわりの断面二次モーメントである。詳細は次節に説明する。

したがって、垂直応力と曲げモーメントの関係式は下記のように、中立軸よりの距離 y および断面二次モーメント I_z で書ける。

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y \quad (6.20)$$

ここで、注意してほしいのは、 y は正の場合には引張応力となり、負の場合には圧縮応力となる。

同じ断面において、最大の垂直応力（度）は中立軸より最も遠いところに発生するため、

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} = \frac{M}{Z} \quad (6.21)$$

となる。ここで、 $Z = I_z / y_{\max}$ は断面係数と呼ぶ。さらに、曲げモーメントにより最大の垂直応力（度） $|\sigma|_{\max}$ は、

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} \quad (6.22)$$

で計算できる。これは、構造設計法の一つである許容応力度設計法²において重要な式となっている。

6.3.3 複合効果による垂直応力

前述したように、軸力よりも曲げモーメントよりも垂直応力が生じるので、軸力と曲げモーメントを同時に受ける場合（例えば柱）に、その垂直応力はそれぞれによる垂直応力の総和で計算できる。

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{Z} \quad (6.23)$$

ここで、曲げモーメントによる垂直応力は正も負も存在することを注意し、結局最大応力（度）はその絶対値の最大値となる。

6.3.4 せん断応力

せん断応力を定式化するために、図6.8の微小長さ dx の断片を考える。中立軸より下端と上端までの距離をそれぞれ y_1, y_2 、断面奥方向の幅を b_y 、その断面積を A_y とする。さらに、断片を水平方向に切断すると、図6.8(c)となり、せん断応力と垂直応力の水平方向においての釣合い方程式は

² 一次設計法および弾性設計法とも呼ばれている

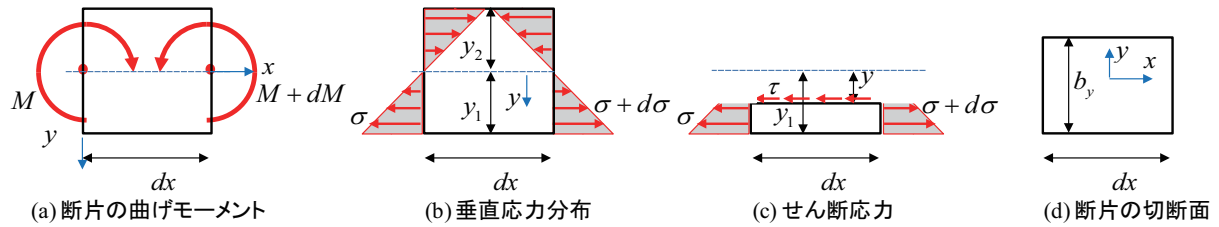


図 6.8 せん断応力

$$-\int_{y_1}^{y_2} \sigma dA - \tau A_y + \int_{y_1}^{y_2} (\sigma + d\sigma) dA = -\int_{y_1}^{y_2} \frac{M}{I} y dA - \tau A_y + \int_{y_1}^{y_2} \frac{M+dM}{I} y dA = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dM}{I} y dA - \tau A_y = 0 \quad (6.24)$$

したがって、せん断応力度は

$$\tau = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \frac{dM}{I} y dA}{A_y} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \frac{dM}{I} y dA}{dx b_y} = \frac{Q}{I b_y} \int_{y_1}^{y_2} y dA = \frac{Q S_y}{I b_y} \quad (6.25)$$

となる。ここで、 $\frac{dM}{dx} = Q$ の関係式が使われた（式 (5.20) において仮定した曲げモーメントの正方向と逆であることを注意してください）。また、 S_y は y より端部までの断面 1 次モーメントである。

中立軸より上半分のせん断応力を計算する場合に、積分範囲を y_2 に直せば、同じように書ける。

$$\tau = \frac{Q}{I b_y} \int_y^{y_2} y dA \quad (6.26)$$

これらの式によると、縁（断面の端部）においては、 $y = y_1$ で積分範囲はゼロであるため、せん断応力はゼロ、中立軸においては積分範囲は最大となるため、せん断応力も最大となることが分かる。その分布は図 6.2(b) に示す。

6.4 断面性質

前節では、断面力（軸力、曲げモーメントおよびせん断力）による（垂直・せん断）応力を定式化した。その定式に出てきた断面の一次モーメント S_y 、二次モーメント I および主軸を決めるための相乗モーメントなどの断面性質をこの節で説明する。

断面 n 次モーメントとは、ある面積 A を持つ断面のある軸³ に対して、一般的に以下のように定義できる。

$$I^n = \int_A y^n dA \quad (6.27)$$

ここで、 y は対象軸よりの距離である。特に、断面一次モーメント ($n=1$ 、First Moment of Area) を S 、断面二次モーメント ($n=2$ 、Second Moment of Area) を I で表す。

6.4.1 図心と断面一次モーメント

後ほど述べるように、図心と断面一次モーメントとの間には一定の関係が成り立つ。

図心とは、図形の中心であり、図形の重心とも呼ばれる。したがって、図形に作用する重力（分布荷重）は、図心にかかる集中力と考えるとよい。分布荷重を集中荷重に変換するには、第二章で習ったパリニオンの定理が適用する。

³ 断面二次モーメントを計算する際、普通は中立軸を対象軸とする。

6.4.1.1 定式化

図心（重心）の座標 (x_0, y_0) を求めるには、集中荷重による x -, y -軸まわりのモーメントと図形のすべての微小面積 dA による同じ軸まわりのモーメントは一致する。

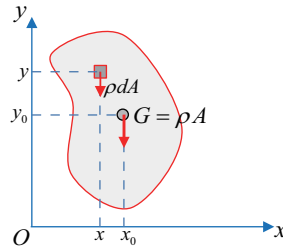


図 6.9 図心または重心の (x_0, y_0) の計算

図 6.9に示すように、等価の集中荷重 G の y -軸まわりのモーメントは

$$Gx_0 = \left(\int_A \rho dA \right) x_0 = A\rho x_0 \quad (6.28)$$

である。ここで、 x_0 は集中荷重 G の y -軸までの距離であり、実は x -方向の座標である。また、 ρ は単位面積あたりの重さを表す「密度」みたいなものとし、図形は一様な密度を持つと仮定する。

図 6.9において、微小面積 dA による y -軸まわりのモーメントは $(\rho dA)x$ であるため、すべての微小面積による y -軸まわりのモーメントは

$$\int_A (\rho dA)x = \rho \int_A x dA \quad (6.29)$$

である。

上記の二つの式は等しいため、変換された集中荷重（図心） G の x -座標 x_0

$$x_0 = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A} \quad (6.30)$$

である。

同様に、 x -軸まわりのモーメントの等価式によって、図心の y -方向の座標 y_0 を以下のように定式化できる。

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A} \quad (6.31)$$

上記の図心の定義式の中では、 S_x と S_y はそれぞれ x -軸および y -軸まわりの断面一次モーメントであり、その式によると、対象軸は図心を通るとき、それに対応する断面一次モーメントはゼロとなるのが分かる。

6.4.1.2 直角四辺形の図心

例えば、図6.10(a)の直角四辺形の図心を求めてみる。規則的な図形なので、「直感」的にもわかるように、図の座標系においては図心の位置は $(b/2, h/2)$ にあり、以下はそれ y -方向の座標 y_0 の計算を例として証明する。図6.10(b)に示すように、図形の x -軸まわりの一次モーメント S_x と断面積 A は

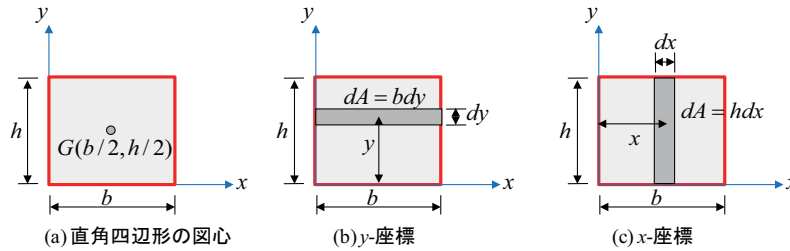


図 6.10 断面一次モーメントと図心：直角四辺形

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y(b dy) = \frac{b}{2} y^2 \Big|_0^h = \frac{bh^2}{2}$$

$$A = \int_A dA = \int_0^h (b dy) = by \Big|_0^h = bh \quad (6.32)$$

となり、図心の y -座標は

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2/2}{bh} = h/2 \quad (6.33)$$

となる。同じように、図心の x -座標も図6.10(c) を使って、以下のように求めることができる。

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_0^b x(h dx)}{bh} = \frac{b^2 h/2}{bh} = b/2 \quad (6.34)$$

6.4.1.3 直角三角形の図心

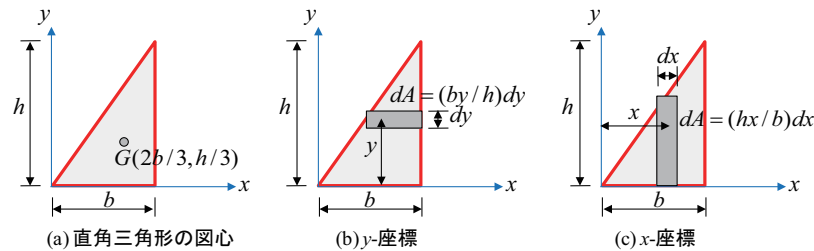


図 6.11 断面一次モーメントと図心：直角三角形

次は、図6.11(a)の直角三角形を計算する。図6.10(b)に示すように、図形の x -軸まわりの一次モーメント S_x と断面積 A は

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y[b(h-y)/h dy] = \frac{b}{h} (hy^2/2 - y^3/3) \Big|_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

$$A = \int_A dA = \int_0^h \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b}{h} (hy - y^2/2) \Big|_0^h = \frac{bh}{2} \quad (6.35)$$

となり、図心の y -座標は

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2/6}{bh/2} = h/3 \quad (6.36)$$

となる。同じように、図心の x -座標も図6.11(c) を使って、以下のように求めることができる。

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_0^b x(hx/b) dx}{bh/2} = \frac{b^2 h/3}{bh/2} = 2b/3 \quad (6.37)$$

実は、直角三角形の図心計算式は前に出てきたように、三角形のような等変分布荷重を集中荷重に変換する際、その作用点の計算のところではすでに暗黙的に使っていた。

6.4.1.4 円形の図心

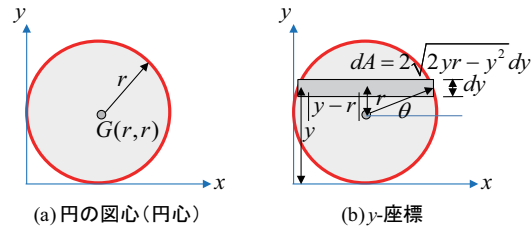


図 6.12 断面一次モーメントと図心：円形

円形の図心を計算するのに、結果は簡単だが（例えば図6.12(a)の場合は (r, r) ）、途中結果は少し複雑である。例えば、 y -座標は以下のように求めることができる。

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_0^{2r} y(2\sqrt{2yr - y^2}) dy}{\pi r^2} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r + r \sin \theta)(2r \cos \theta)(r \cos \theta d\theta)}{\pi r^2} = \frac{\pi r^3 / 2}{\pi r^2} = \frac{r}{2} \quad (6.38)$$

ここで、

$$\begin{aligned} y &= r(1 + \sin \theta) \\ dy &= d[r(1 + \sin \theta)] = r \cos \theta d\theta \\ \cos^2 \theta &= (\cos 2\theta + 1)/2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

などが利用された。 x -座標 $x_0 = r$ も同じように求めることができる。

6.4.1.5 複合図形の図心

台形などより複雑な図形の場合に、前述の方法でも計算できるが、計算はややこしくなってしまう。直角四辺形や直角三角形のような単純図形に分解できる場合に、以下のように、計算をより楽にする方法がある。

複合図形を単純図形に分解し、単純図形の面積および図心を利用して、その図心は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_i A_i y_{0i}}{\sum_i A_i} \\ x_0 &= \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i A_i x_{0i}}{\sum_i A_i} \end{aligned} \quad (6.40)$$

これは、前述した積分の方法と本質的には同じである。
実は、複合図形を構築するには、普通のプラスと正反対のマイナスの考え方がある。

例 6.1. プラスの考え方によって、図6.13(a)の台形の図心を計算してください。

図6.13(a)の台形は、図(b)に示すように直角四辺形 a プラス直角三角形 b で作られる。

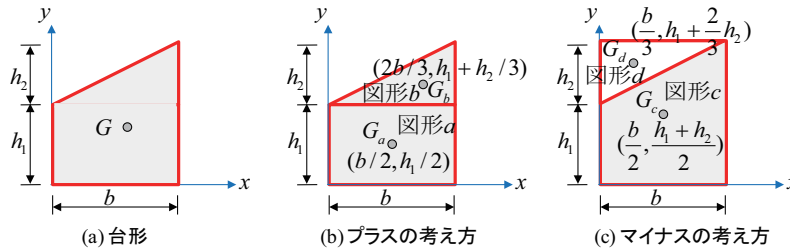


図 6.13 複合図形の断面一次モーメントと図心：台形

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{S_x}{A} = \frac{A_a y_a + A_b y_b}{A_a + A_b} = \frac{(bh_1)(h_1/2) + (bh_2/2)(h_1 + h_2/3)}{bh_1 + bh_2/2} = \frac{3h_1^2 + 3h_1h_2 + h_2^2}{6h_1 + 3h_2} \\
 x_0 &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_a x_a + A_b x_b}{A_a + A_b} = \frac{(bh_1)(b/2) + (bh_2/2)(2b/3)}{bh_1 + bh_2/2} = \frac{3bh_1 + bh_2}{6h_1 + 3h_2}
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

例 6.2. マイナスの考え方によって、図6.13(a)の台形の図心を計算してください。

図6.13(a)の台形は、図(c)のような大きな直角四辺形 c プラス負の直角三角形 d で作られる。

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{S_x}{A} = \frac{A_c y_c + (-A_d) y_d}{A_c + (-A_d)} = \frac{b(h_1 + h_2)[(h_1 + h_2)/2] + (-bh_2/2)(h_1 + 2h_2/3)}{b(h_1 + h_2) + (-bh_2/2)} = \frac{3h_1^2 + 3h_1h_2 + h_2^2}{6h_1 + 3h_2} \\
 x_0 &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_c x_c + (-A_d) x_d}{A_c + (-A_d)} = \frac{b(h_1 + h_2)(b/2) + (-bh_2/2)(2b/3)}{b(h_1 + h_2) + (-bh_2/2)} = \frac{3bh_1 + bh_2}{6h_1 + 3h_2}
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

当然だが、どっちの方法でも同じ結果になっていることが分かる。

6.4.2 断面二次モーメントと断面係数

断面二次モーメント I は以下のように定義される。

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \tag{6.43}$$

6.4.2.1 中立軸と図心

曲げモーメントのみを受ける場合に、断面における軸力はゼロであるため、以下の

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E \phi y dA = E \phi \int_A y dA = E \phi S_x = 0 \tag{6.44}$$

が成り立つ。ここで、 y は中立軸からの距離を表し、 ϕ は前に説明したように部材の断面において回転角の変化率を表す曲率である。ヤング係数 E 、モーメントによる曲率 ϕ はゼロでないため、断面一次モーメント S_x はゼロとなる。したがって、曲げモーメントのみを受ける場合に、中立軸は図心にあることが分かる。

6.4.2.2 直角四辺形

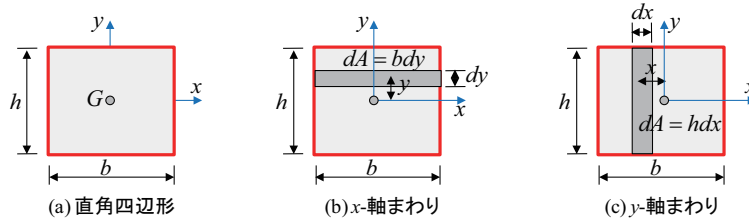


図 6.14 断面二次モーメントと図心：直角四辺形

直角四辺形およびそれによる複合断面は、よく使われる断面形式である。図6.14(a)に示す直角四辺形に対して、図心を通る中立軸まわりの断面二次モーメントの計算は図6.14(b)と(c)を利用する。

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 (b dy) = \frac{by^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \\
 I_y &= \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 (h dx) = \frac{hx^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{hb^3}{12}
 \end{aligned}
 \tag{6.45}$$

曲げモーメント M による垂直応力度 σ の計算式によると、同じ曲げモーメントであっても、断面二次モーメントが大きいほど、縁端に生じる（絶対値の）最大応力が小さくなる。材料に限界（許容）応力度があるため、最大応力度を抑える必要がある。したがって、上記の式によっては、たとえば x -軸まわりの断面二次モーメント I_x を増やすのに、幅 b （1次式）よりもせい h （3次式）を増やしたほうが効果的である。

さらに、直角四辺形の断面積 $A = bh$ を I_x の式に代入すると

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12} \tag{6.46}$$

となるため、同じ断面積であっても、（梁）せいをより大きくしたほうが、断面二次モーメントの増加、そして断面最大応力度の減少に効果的であることが分かる。したがって、梁のせいは普通幅より大きくなっている。

6.4.2.3 三角形と円形

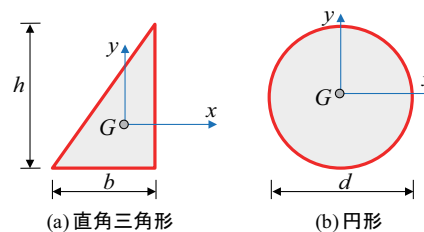


図 6.15 断面二次モーメントと図心：三角形と円形

図6.15に示す三角形と円形の（図心を通る）中立軸まわりの断面二次モーメントの定式は以下のようなとなる。ここで、 d は円の直径である。

$$\begin{aligned} \text{三角形: } I_x &= \frac{bh^3}{36}, I_y = \frac{hb^3}{36} \\ \text{円形: } I_x &= \frac{\pi d^4}{64}, I_y = \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \quad (6.47)$$

6.4.2.4 平行軸定理

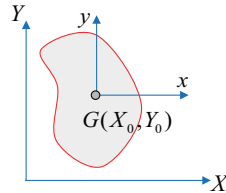


図 6.16 平行軸定理

基本図形の（図心を通る）中立軸まわりの断面二次モーメントを定式化した但、中立軸と平行する軸まわりの断面二次モーメントもその定式化を利用して簡単に求めることができる。

例えば、図6.16の図形に対しては二つの座標系がある。一つは、図形の図心を原点とした局所座標系 (x, y) であり、その軸は図形の中立軸である。もう一つは、局所座標系の軸と平行する全体座標系 (X, Y) である。

局所座標系の軸まわりの断面二次モーメント I_x と I_y は既知とし、図形の全体座標系の軸まわりの断面二次モーメント I_X と I_Y を求める。したがって、断面二次モーメントの定義式によつては、 X 軸まわりの I_X は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} I_X &= \int_A Y^2 dA = \int_A (y + Y_0)^2 dA = \int_A (y^2 + 2yY_0 + Y_0^2) dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2Y_0 \int_A y dA + Y_0^2 \int_A dA = I_x + 2Y_0 S_x + Y_0^2 A = I_x + Y_0^2 A \end{aligned} \quad (6.48)$$

ここで、局所座標系の x 軸は図心を通るから、 $S_x = 0$ が利用された。

同じように、 Y 軸まわりの断面二次モーメント I_Y は

$$I_Y = I_y + X_0^2 A \quad (6.49)$$

となる。

平行軸定理は、複合図形の断面二次モーメントの計算にもよく使われる。

6.4.2.5 複合図形



図 6.17 鋼構造の典型的断面形式

材料のメリットをうまく利用できるよう、基本図形以外にもいろいろな断面形式が実構造物に使われている。特に、鉄骨は強度が高く、コストも高いため、(垂直)応力が小さいところに少ない材料で、応力が大きいところにより多い材料で断面が設計されている。例えば、鉄骨の典型的な断面形式は、図6.17に示すものがある。

複合図形の断面二次モーメントを計算するには、前述した各基本図形の中立軸まわりの断面二次モーメントおよび平行軸定理が使える。断面一次モーメントの計算方向と同じように、プラスとマイナスの考え方もある。

図6.18(a)のH形断面は、鉄骨構造の梁ではよく使われる断面形式であり。図6.18(b)のH形断面は、鉄骨構造の柱ではよく使われる断面形式であるここで、これらの断面に対してで、断面二次モーメントの計算を説明する。

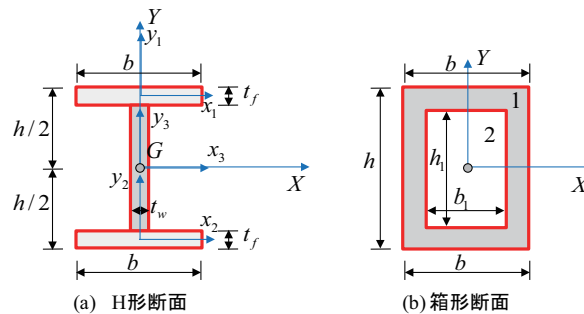


図 6.18 H形と箱（角）形断面の断面二次モーメント

例 6.3. プラスの考え方によって、図6.18(a)のH形断面の(図心を通る)中立軸まわりの断面二次モーメント I_X と I_Y を求めてください。

図6.18(a)のH形断面は、それぞれフランジの直角四辺形1と2、およびウェブの直角四辺形3で構築される。フランジとウェブの厚みはそれぞれ t_f と t_w で表す。直角四辺形のそれぞれの局所座標系における(図心を通る)中立軸まわりの断面二次モーメントは

$$\begin{aligned} I_{x_1} = I_{x_2} &= \frac{bt_f^3}{12}, & I_{y_1} = I_{y_2} &= \frac{t_f b^3}{12} \\ I_{x_3} &= \frac{t_w(h-2t_f)^3}{12}, & I_{y_3} &= \frac{(h-2t_f)t_w^3}{12} \end{aligned} \quad (6.50)$$

となり、全体座標系 (X, Y) まわりの断面二次モーメントは

$$\begin{aligned} I_X &= {}_1I_X + {}_2I_X + {}_3I_X \\ I_Y &= {}_1I_Y + {}_2I_Y + {}_3I_Y \end{aligned} \quad (6.51)$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} {}_2I_X = {}_1I_X &= I_{x_1} + y_{10}^2 A_1 = \frac{bt_f^3}{12} + \left(\frac{h-t_f}{2}\right)^2 (bt_f) = \frac{bt_f}{12} (4t_f^2 - 6ht_f + 3h^2) \\ {}_2I_Y = {}_1I_Y &= I_{y_1} + x_{10}^2 A_1 = \frac{bt_f^3}{12} + 0 \cdot (bt_f) = \frac{bt_f^3}{12} \\ {}_3I_X &= I_{x_3} + y_{30}^2 A_3 = \frac{t_w(h-2t_f)^3}{12} + 0 \cdot [t_w(h-2t_f)] = \frac{t_w(h-2t_f)^3}{12} \\ {}_3I_Y &= I_{y_3} + x_{30}^2 A_3 = \frac{(h-2t_f)t_w^3}{12} + 0 \cdot [t_w(h-2t_f)] = \frac{(h-2t_f)t_w^3}{12} \end{aligned} \quad (6.52)$$

例 6.4. マイナスの考え方によって、図6.18(b)に示す箱形断面の（図心を通る）中立軸まわりの断面二次モーメント I_X と I_Y を求めてください。

図6.18(b)に示す箱型の複合図形に対して、プラスの考え方によっては、四つの基本図形（直角四辺形）があり、また、基本図形の図心は全体座標系の原点にないため、平行軸定理も必要となる。しかし、マイナスの考え方によっては、箱型断面は大きい直角四辺形から内部の小さい直角四辺形を引くこととなり、さらに、二つの基本図形の図心も全体座標系の原点にあるため、平行軸定理は必要ないとなる。したがって、

$$\begin{aligned} I_X &= {}_1I_X + {}_2I_X = \frac{bh^3}{12} + \frac{-b_1h_1^3}{12} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12} \\ I_Y &= {}_1I_Y + {}_2I_Y = \frac{hb^3}{12} + \frac{-h_1b_1^3}{12} = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1b_1^3}{12} \end{aligned} \quad (6.53)$$

6.4.3 主軸、断面相乗モーメント

ここまでも計算されたとおり、同じ図心を通っても、対象軸が違うと、その断面二次モーメントも違ってくる。すべての対象軸の中で対応する断面二次モーメントは最大となるもの、およびそれに直交する軸（対応する断面二次モーメントは最小）は、主軸と呼ばれる。

断面相乗モーメントは

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (6.54)$$

として定義される。断面相乗モーメントは、あまり使われていないため、具体的な計算は説明しないが、一つの特徴のみを覚えてほしい。それは、直交座標軸のどちらかの軸が対称であれば、その断面相乗モーメントはゼロとなる。

6.5 宿題

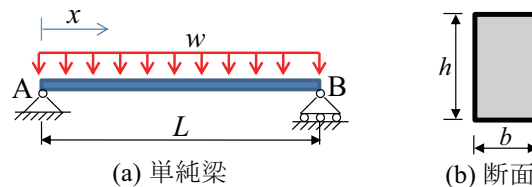


図 6.19 単純梁の形状決定問題

Exercise 6.1. 図6.19の単純梁に対して

1. 曲げモーメントを求め、その分布図を描いてください。
2. その変形図を描いてください。
3. 応力度の許容値を σ とし、梁断面の幅を b として固定する。その必要最低限のせい h を x の関数として表し、図でそのせいを描いてください。

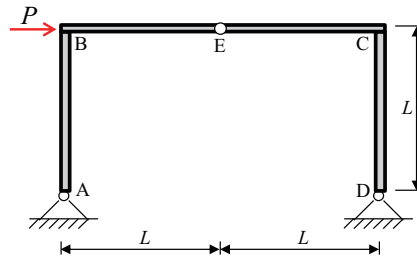


図 6.20 3 ヒンジラーメンの構造設計問題

Exercise 6.2. 図6.20の3ヒンジラーメン構造に対して

1. 断面力（軸力・曲げモーメント・せん断力）を求め、その分布図を描いてください。
2. その変形図を描いてください。
3. すべての部材の断面積を A 、断面係数を Z 、中立軸より上（下）端までの断面1次モーメントを S 、断面2次モーメントを I 、断面の幅を b とした場合、軸力による最大垂直応力度 $|\sigma|_{\max}$ 、曲げモーメントによる最大垂直応力度 $|\sigma|_{\max}$ 、およびせん断力による最大せん断力応力度 $|\tau|_{\max}$ を求めてください。

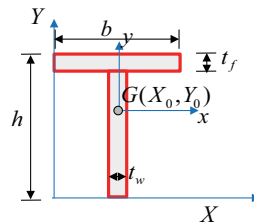


図 6.21 T形断面

Exercise 6.3. 図6.21に示すT型断面には、座標系 (x, y) は断面の図心を通り、座標系 (X, Y) と平行する。

1. 座標系 (X, Y) において、図心の位置 $G(X_0, Y_0)$ を求めてください。
2. x -、 y -軸まわりの断面一次モーメント S_x と S_y を求めてください。
3. x -、 y -軸まわりの断面二次モーメント I_x と I_y を求めてください。
4. x -軸まわりの曲げモーメントを M_x とし、断面の最大垂直応力度 σ_{\max} を求めてください。

Chapter 7 静定構造の変形

Abstract この章には、外力荷重による静定梁・静定ラーメン・静定トラス構造の変形を求める方法について解説する。梁とラーメン構造には、曲げモーメントによる変形が支配となっているため、この二種類の構造物には曲げモーメントによる変形のみを考える。方法としては、弾性曲線式、モールの定理、仮想仕事法などがある。弾性曲線式は、梁のみに適応できる。モールの定理も梁のための方法だが、曲げモーメントが複雑な場合にも適応できる。また、仮想仕事法は一般性のある方法で、構造種別に関係せずどれにも適応できる。

7.1 弾性曲線式による梁の変形

7.1.1 基本式

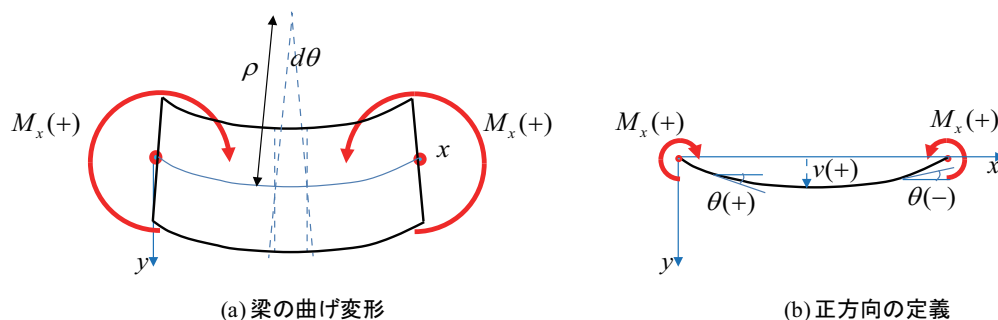


図 7.1 梁の曲げ変形

梁の曲げによる変形は図7.1に示す。また、図中の座標系に対応して、各パラメータの正方向の定義は図7.1(b)に示す。

梁の曲げ変形を求めるために定められた正方向の定義：

- y の正方向は、たわみ（鉛直方向の変位） v の正方向とする。
- x 軸との角度は時計回り方向を、たわみ角（回転角） θ の正方向とする。
- 梁を y の正方向に膨らませる方向は、曲げモーメント M_x の正方向¹とする。

¹ 前章までは曲げモーメントの正方向がなかったが、ここでは曲げによる変位を求め、変位の正方向が決まっているため、それに合わせて曲げモーメントの正方向を定めている。あくまでも合わせた正方向なので、この正方向の定義はほかの構造物に一般性を持たない。

第6章で、曲げモーメントによる垂直応力を求めるには、曲げモーメントと曲率 ϕ の関係式があった。

$$M_x = EI\phi = -EI\frac{d\theta}{dx} = -EI\frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.1)$$

この式のマイナス (-) も曲げモーメントの正方向およびたわみに合わせたものであり、梁は y の正方向に膨らむとき、その二回微分はマイナスとなる。上式を整理すると、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{EI} \quad (7.2)$$

となる。それぞれ1回と2回積分すると、たわみ角 θ とたわみ v は以下のように書ける。

曲げモーメントによる梁のたわみ・たわみ角：

$$\begin{aligned} \theta &= -\int \frac{M_x}{EI} dx + C_1 \\ v &= \int \theta dx + C_2 = -\int \left(\int \frac{M_x}{EI} dx \right) dx + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

ここで、 C_1 と C_2 は未定の積分定数であり、境界条件 (Boundary Condition) によって決める。

また、積分の範囲が定めていないことを注意してほしい。ようするに、積分の結果は x の関数であり、梁全体の変形を表している。

7.1.2 曲げモーメントの式は一つの場合

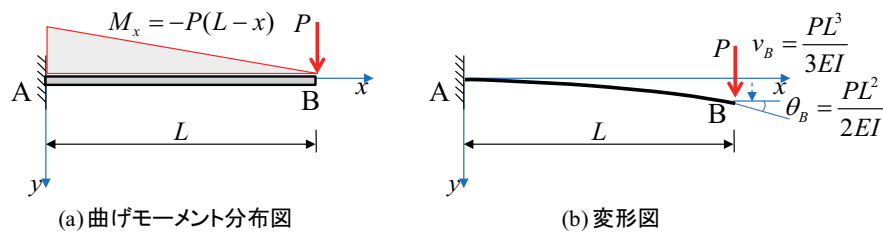


図 7.2 片持梁の曲げ変形

梁の曲げモーメントは一つの式で表現できる場合、その変形の計算は比較的簡単で、例題としては、図7.2の片持梁の変形を考える。

例 7.1. 図7.2の片持梁の変形を求めてください。

曲げモーメントの計算を省略するが、その分布は

$$M_x = -P(L-x) \quad (7.4)$$

である。式 (7.3) の積分式によっては、

$$\begin{aligned} \theta(x) &= -\int \frac{M_x}{EI} dx + C_1 = \int \frac{P(L-x)}{EI} dx + C_1 = \frac{P}{EI} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \\ v(x) &= \int \theta dx + C_2 = \frac{P}{EI} \left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

が分かる。ここで、未知数 C_1 と C_2 という二つがあるため、二つの条件式が必要となる。それは、左の固定端 ($x=0$) におけるたわみ $v(0)$ およびたわみ角 $\theta(0)$ はゼロということが利用できる。したがって、

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta(0) = C_1 = 0 &\implies C_1 = 0 \quad (x=0) \\ v_B = v(0) = C_2 &\implies C_2 = 0 \quad (x=0)\end{aligned}\quad (7.6)$$

であり、式 (7.5) に代入すると、片持梁のたわみ角およびたわみは以下ようになる。

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{P}{EI} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right), \\ v(x) &= \frac{P}{EI} \left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)\end{aligned}\quad (7.7)$$

その変形図は図7.2(b) と (c) に示す。この式によると梁の任意の位置の変形（たわみまたはたわみ角）を求めることができる。たとえば、自由端 ($x=L$) のたわみ角とたわみは

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta(L) &= \frac{PL^2}{2EI}, \\ v_B = v(L) &= \frac{PL^3}{3EI}\end{aligned}\quad (7.8)$$

簡単な物理実験とたわみおよびたわみ角の正方向の定義によっても、この結果が正しいと確認できる。

7.1.3 曲げモーメントの式は多数の場合

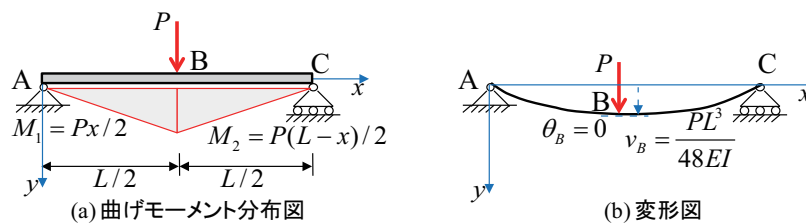


図 7.3 単純梁の曲げ変形

曲げモーメントは一つの式で表せない場合には、弾性曲線式による変形計算は少しややこしくなる。例えば、図7.3の単純梁の変形を考えてみる。

例 7.2. 図7.3の単純梁の変形を求めてください。

計算の詳細が省略するが、図7.3の単純梁の曲げモーメント分布は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\text{AB 間}(0 \leq x \leq \frac{L}{2}): & \quad M_1 = \frac{P}{2}x \\ \text{BC 間}(\frac{L}{2} \leq x \leq L): & \quad M_2 = \frac{P}{2}(L-x)\end{aligned}\quad (7.9)$$

弾性曲線式 (7.3) をそれぞれの空間に対して適用すると

AB 間 ($0 \leq x \leq \frac{L}{2}$):

$$\theta_1(x) = - \int \frac{M_1}{EI} dx + C_1 = - \int \frac{Px}{2EI} dx + C_1 = - \frac{Px^2}{4EI} + C_1$$

$$v_1(x) = \int \theta_1 dx + C_2 = \int - \frac{Px^2}{4EI} dx + C_1 x + C_2 = - \frac{Px^3}{12EI} + C_1 x + C_2$$

BC 間 ($\frac{L}{2} \leq x \leq L$):

$$\theta_2(x) = - \int \frac{M_2}{EI} dx + C_3 = - \int \frac{P(L-x)}{2EI} dx + C_3 = - \frac{P}{4EI} (2Lx - x^2) + C_3$$

$$v_2(x) = \int \theta_2 dx + C_4 = \int - \frac{P}{4EI} (2Lx - x^2) dx + C_3 x + C_4 = - \frac{P}{12EI} (3Lx^2 - x^3) + C_3 x + C_4 \quad (7.10)$$

ここで、 C_1, C_2, C_3, C_4 という四つの未知数があるため、四つの（境界）条件式が必要となる。それは、両端部 ($x=0, x=L$) においてのたわみがゼロによって、以下の二つの方程式がある。

$$\begin{aligned} v_1(0) = C_2 = 0 &\implies C_2 = 0 \\ v_2(L) = - \frac{PL^3}{6EI} + LC_3 + C_4 = 0 &\implies - \frac{PL^3}{6EI} + LC_3 + C_4 = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

また、B 点 ($x=L/2$) は二つの計算空間の共通な部分であり、それぞれの空間において B 点のたわみおよびたわみ角は

$$\begin{aligned} v_1(L/2) &= - \frac{PL^3}{96EI} + \frac{L}{2} C_1 + C_2, \\ v_2(L/2) &= - \frac{5PL^3}{96EI} + \frac{L}{2} C_3 + C_4, \\ \theta_1(L/2) &= - \frac{PL^2}{16EI} + C_1, \\ \theta_2(L/2) &= - \frac{3PL^2}{16EI} + C_3 \end{aligned} \quad (7.12)$$

である。B 点の両側は破断しない限り、両側のたわみとたわみ角が同じ（変形の連続条件）なので、さらに以下のような二つの方程式を書ける。

$$\begin{aligned} v_1(L/2) = v_2(L/2) &\implies = \frac{PL^3}{12EI} + LC_1 + 2C_2 - LC_3 - 2C_4 = 0 \\ \theta_1(L/2) = \theta_2(L/2) &\implies = \frac{PL^2}{8EI} + C_1 - C_3 = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

したがって、四つの未知数に対して、四つの方程式があるため、それを解くと、未知数は

$$C_1 = \frac{PL^2}{16EI}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{3PL^2}{16EI}, \quad C_4 = \frac{-PL^3}{48EI} \quad (7.14)$$

となり、単純梁のたわみ角とたわみ角は

$$\begin{aligned}
 \text{AB 間}(0 \leq x \leq L/2): \quad & \theta_1(x) = -\frac{Px^2}{4EI} + \frac{PL^2}{16EI} \\
 & v_1(x) = -\frac{Px^3}{12EI} + \frac{PL^2}{16EI}x \\
 \text{BC 間}(L/2 \leq x \leq L): \quad & \theta_2(x) = -\frac{P}{4EI}(2Lx - x^2) + \frac{3PL^2}{16EI} \\
 & v_2(x) = -\frac{P}{12EI}(3Lx^2 - x^3) + \frac{3PL^2}{16EI}x - \frac{PL^3}{48EI}
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

となる。中央点 ($x = L/2$) のたわみ角とたわみは

$$\begin{aligned}
 \theta_B = \theta_1(L/2) = \theta_2(L/2) &= 0, \\
 v_B = v_1(L/2) = v_2(L/2) &= \frac{PL^3}{48EI}
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

となる。上記の式から、以下の討論はできる。

1. たわみは正であるため、梁の中央点は y の正方向に変形することを意味する（物理的にも一致する）。
2. 構造物および外力荷重は中央点を境界にしてミラー対称であり、中央点のたわみ角は両側にも同じとならないとできないため、結局ゼロであることは、対称性からも分かる。
3. たわみ角はたわみの一回微分であるため、たわみ角はゼロとなる場合に、たわみは極限值を取る。単純梁の中央点におけるたわみ角はゼロであるため、中央点のたわみは最大であることを実証している。

例題7.2によっては、曲げモーメントが複数の式で表現する梁に対して、弾性曲線式による解法は以下のようにまとめることができる。

弾性曲線式による梁の曲げ変形の求め方：

1. 各計算空間に対して弾性曲線式を使って、それぞれ一回と二回積分を行う。
2. 梁全体の境界条件によって方程式を立てる。
3. 隣接な計算空間の境界点におけるたわみおよびたわみ角の変形連続条件によって方程式を立てる。
4. 未知数（積分定数）の数と方程式の数が一致するかを確認し、連立方程式を解くことによって未知の積分定数を求める。
5. 積分定数を各計算空間のたわみおよびたわみ角方程式に代入し、代表点（境界点、変形最大点など）の変形を求める。

7.2 モールの定理

前節の弾性曲線式による曲げ変形を求めるには、曲げモーメントは一つの式で表せない場合に、計算はかなり複雑となっている。こういうケースに対して、この節では、たわみ、たわみ角および曲げモーメントの関係式は、第5章で習った $M-Q$ 関係式との相似性に基づいて開発されたモールの定理について説明する。しかし、モールの定理はいまほとんど使われていないため、授業中では詳しく説明しないとする。この節の内容を参考として残しておく。余力のある方は一度目を通してください。

$$\begin{aligned}\frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right) = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{EI} \\ \frac{d^2M_x}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dM_x}{dx} \right) = \frac{dQ_x}{dx} = -\bar{w}_x\end{aligned}\quad (7.17)$$

ここで、曲げモーメントの正方向は第5章に用いたものと反対なので、符号が違う。上の式によつては、以下の相似関係は明らかである。

$$\begin{aligned}\text{変位} & \quad \text{力} \\ v & \iff \bar{M}_x \\ \theta & \iff \bar{Q}_x \\ M_x/(EI) & \iff \bar{w}_x\end{aligned}\quad (7.18)$$

ここで、区別のため、力おける諸量に $(\bar{\quad})$ をつけた。以上の相似性によって、変位を求める原問題を、力を求める共役問題に変換できる。この場合、原問題の曲げモーメント分布 M_x と曲げ剛性 EI の比を、共役問題の分布荷重 \bar{w}_x に変換する必要があり、さらに、原問題の解析モデルも変位および力の境界条件の対応関係によって、共役問題の解析モデルに変換しないとできない。これで、力を求める問題は、ここまでやってきたし、解法自体も変位問題より簡単である。

7.2.1 片持梁

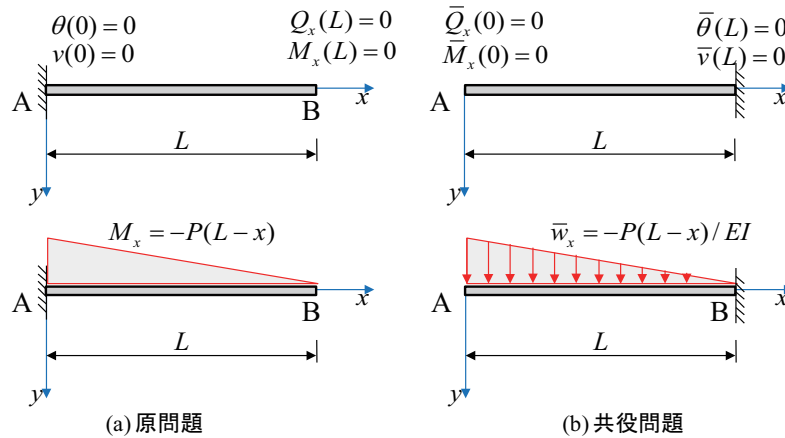


図 7.4 片持梁の変位を求めるための原問題と共役問題

図7.2の例題を考える。原問題と共役問題の解析モデルは対応関係によって以下のように変換する。

| | 原問題 | 共役問題 |
|---------|-----------------|----------------------------------|
| 変位の境界条件 | $v(0) = 0$ | $\bar{M}_x(0) = 0$ |
| | $\theta(0) = 0$ | $\bar{Q}_x(0) = 0$ |
| 力の境界条件 | $M_x(L) = 0$ | $\bar{v}(L) = 0$ |
| | $Q_x(L) = 0$ | $\bar{\theta}(L) = 0$ |
| 外力荷重 | $M_x = -P(L-x)$ | $\bar{w}_x = -\frac{P(L-x)}{EI}$ |

したがって、共役問題の解析モデルは図7.4(b) のようになる。

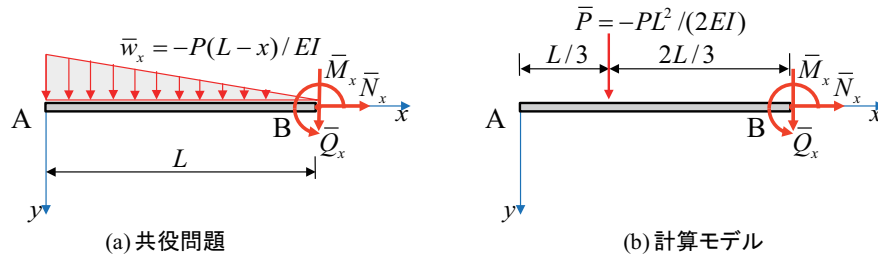


図 7.5 片持梁自由端の変形

原問題において自由端 B 点のたわみ $v_B = v(L)$ とたわみ角 $\theta_B = \theta(L)$ を求める問題は、図7.5に示すような共役問題において固定端 B 点の曲げモーメント $\bar{M}_x(L)$ とせん断力 $\bar{Q}_x(L)$ となる。ここで、曲げモーメントの正方向は、梁を y の正方向に膨らませるように定義されていることを注意してください。したがって、

$$\sum Y = \bar{Q}_x + \bar{P} = 0 \implies \theta_B = \bar{Q}_x(L) = -\bar{P} = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\sum M_{B \text{ 点まわり}} = -\bar{M}_x - \bar{P} \frac{2L}{3} = 0 \implies v_B = \bar{M}_x(L) = -\bar{P} \frac{2L}{3} = \frac{PL^2}{2EI} \frac{2L}{3} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (7.20)$$

当然だが、これは、弾性曲線式による結果と一致している。

7.2.2 単純梁

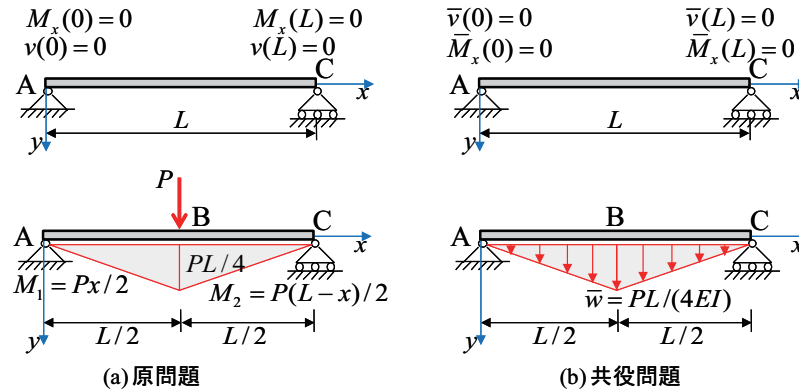


図 7.6 単純梁の変位を求めるための原問題と共役問題

図7.3の例題を考える。原問題と共役問題の解析モデルは対応関係によって以下のように変換する。

| | 原問題 | 共役問題 | |
|---------------------|--------------------------|------------|----------------------------------|
| 変位の境界条件 | $v(0) = 0$ | \implies | $\bar{M}_x(0) = 0$ |
| | $v(L) = 0$ | \implies | $\bar{M}_x(L) = 0$ |
| 力の境界条件 | $M_x(0) = 0$ | \implies | $\bar{v}(0) = 0$ |
| | $M_x(L) = 0$ | \implies | $\bar{v}(L) = 0$ |
| 外力荷重 | | | |
| $0 \leq x \leq L/2$ | $M_1 = \frac{Px}{2}$ | \implies | $\bar{w}_1 = \frac{Px}{2}$ |
| $L/2 \leq x \leq L$ | $M_2 = \frac{P(L-x)}{2}$ | \implies | $\bar{w}_2 = \frac{P(L-x)}{2EI}$ |

したがって、共役問題の解析モデルは図7.6(b)のようになる。

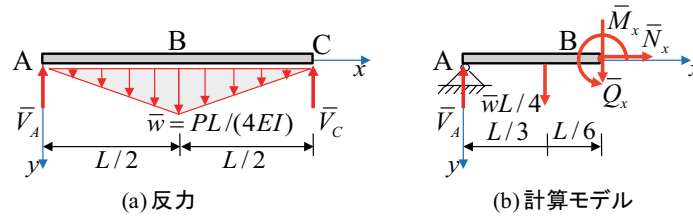


図 7.7 単純梁中央点の変形

原問題において中央点 B 点のたわみ $v_B = v(L/2)$ とたわみ角 $\theta_B = \theta(L/2)$ を求める問題は、図7.7に示すような共役問題において中央点 B 点の曲げモーメント $\bar{M}_x(L/2)$ とせん断力 $\bar{Q}_x(L/2)$ となる。ここで、曲げモーメントの正方向は、梁を y の正方向に膨らませるように定義されていることを注意してください。

反力の計算はここで省略するが、対称性を利用すれば

$$\bar{V}_A = \bar{V}_C = \frac{1}{2} \bar{w} \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI} \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{16EI} \quad (\uparrow) \quad (7.22)$$

となる。原問題の中央点のたわみとたわみ角は

$$\begin{aligned} \sum Y &= -\bar{V}_A + \bar{Q}_x + \frac{1}{2} \bar{w} \frac{L}{2} = 0 \\ \implies \theta_B &= \bar{Q}_x(L/2) = \bar{V}_A - \frac{\bar{w}L}{4} = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{PL^2}{16EI} = 0 \\ \sum M_{B \text{ 点まわり}} &= -\bar{M}_x + \bar{V}_A \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \bar{w} \frac{L}{2} \frac{L}{3} = 0 \\ \implies v_B = \bar{M}_x(L) &= \bar{V}_A \frac{L}{2} - \frac{\bar{w}L}{4} \frac{L}{6} = \frac{PL^2}{16EI} \frac{L}{2} - \frac{PL^2}{16EI} \frac{L}{6} = \frac{PL^3}{48EI} \end{aligned} \quad (7.23)$$

当然だが、これは、弾性曲線式による結果にも一致している。

7.2.3 張出梁とゲルバー梁

張出梁とゲルバー梁は、お互いにとって共役問題の解析モデルとなる。ここでは、具体的な計算問題を考えないが、張出梁およびゲルバー梁の共役問題における解析モデルは図7.8に示す。

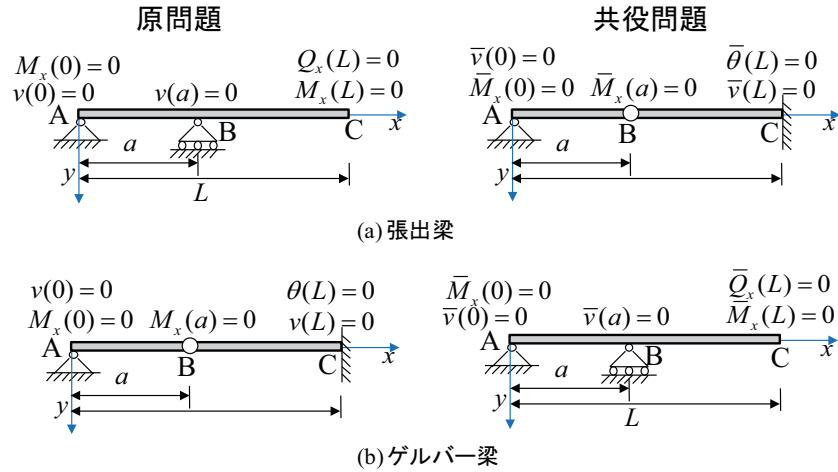


図 7.8 張出梁とゲルバー梁

7.3 仮想仕事法

仮想仕事法は、仮想仕事の原理に基づいた手法である。前述した弾性曲線式とモールの定理は、一般に梁のみを対象しているが、仮想仕事法は、任意の構造形式（梁、ラーメン構造、トラス）に適用できる手法である。また、仮想仕事の原理は、変形を求める問題以外にも、たくさんの構造工学問題（例えば、崩壊荷重を求める問題など）に適用されている。

7.3.1 仮想仕事の原理

仮想仕事法には、実系と仮想系があり、外力のなした仕事量の総和が、内力のなした仕事の総和に等しいというエネルギーの保存則が利用される。仮想仕事法の誘導詳細を省略するが、結果としては、以下のような関係式がある。

仮想仕事の原理：

$$\text{仮想荷重} \times \text{実変位} = \text{仮想荷重による断面力} \times \text{実変形}$$

これ以降は、仮想系の断面力および変位の記号の上にバーをつけることによって実系の断面力と区別する：

- 実系：外力 P ・ モーメント M 、軸力 N ・ せん断力 Q ・ 曲げモーメント M 、変位 v と変位角 θ
- 仮想系：外力 \bar{P} ・ モーメント \bar{M} 、軸力 \bar{N} ・ せん断力 \bar{Q} ・ 曲げモーメント \bar{M} 、変位 \bar{v} と変位角 $\bar{\theta}$

したがって、仮想仕事の原理による式は以下ようになる。

仮想仕事の式：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{P}_i v_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \theta_j &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \bar{N}_k \varepsilon_k dx + \int_0^{L_k} \bar{M}_k \phi_k dx + \int_0^{L_k} \bar{Q}_k \gamma_k dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{Q}_k Q_k}{GA_k} dx \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

上式の中で、第一項は、仮想（系の）荷重 \bar{P}_i, \bar{M}_j かける仮想荷重の方向における実（系の）変位であり、第二・三項は、仮想系における荷重による断面力かける実系における変形である。第二項にひずみや曲率などの変形の項があり、使いにくいので、断面力しかない第三項は一般的に使われている。

さらに、仮想仕事法での仮想荷重は、任意に指定することができる。計算上便利なところと値をかければよい。普通は求めたい（実系の）変位に対応する場所・方向に大きさが1である荷重（変位の場合には集中力、回転角の場合にはモーメント）をかける。この場合の仮想仕事法は、単位荷重法とも呼ばれる。

単位荷重法の式：

$$\begin{aligned} 1 \cdot v &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{Q}_k Q_k}{GA_k} dx \right) \\ 1 \cdot \theta &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{Q}_k Q_k}{GA_k} dx \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

単位荷重法による建物の変形（変位・回転角）を求める計算手順は以下のようまとめる。

単位荷重法の計算手順：

1. 各計算空間に対して、局所座標系を設定し、実問題の断面力分布を求める。
2. 変位（回転角）を求めたい場所に、仮定した変位（回転角）の正方向に大きさが1となる単位荷重をかけ、仮想問題とする。ここで、変位を求める問題では単位荷重は集中荷重となり、回転角を求めたい場合には単位荷重はモーメントとなる。
3. 上記1と同じ局所座標系を使い、上記2の仮想問題に対して、断面力分布を求める。
4. 式(7.25)を適用し、変位または回転角を求める。

7.3.2 単位荷重法によるトラス構造の変形

トラス構造の場合には、曲げモーメントもせん断力もゼロであり、一つの部材における軸力はどこでも同じなので、節点変位を求めるには、以下の式となる。

単位荷重法によるトラス構造の変形：

$$1 \cdot v = \sum_{k=1}^m \int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx = \sum_{k=1}^m \frac{\bar{N}_k N_k L_k}{EA_k} \quad (7.26)$$

ここで、 m は部材の数である。

例えば、図7.9(a)に示すトラス構造に対して、節点Eの水平方向の変位を求める問題を考える。

例 7.3. 図7.9(a)に示すトラス構造に対して、節点Eの水平方向の変位を求めてください。ただし、各部材の軸剛性を同じように EA とする。

節点Eの水平方向の変位を求めたいため、対応する仮想問題としては、図7.9(b)に示す節点Eの水平方向に右向きに単位仮想荷重（集中力）が作用する問題となる。

実問題における各部材の軸力 N_k はすでに第4章で計算され、式(7.27)にまとめられる。また、途中結果が省略するが、仮想問題における各部材の軸力 \bar{N}_k も式(7.27)にまとめる。

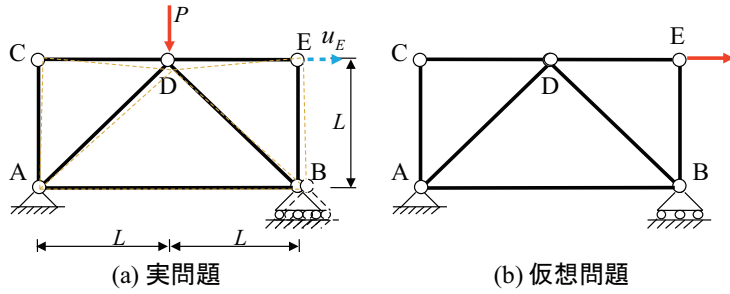


図 7.9 トラス構造の節点変位

| 部材 | N_k | \bar{N}_k | L_k | $\frac{N_k \bar{N}_k L_k}{EA}$ |
|---------------|----------------|---------------|-------------|--------------------------------|
| AB | $P/2$ | $1/2$ | $2L$ | $PL/(2EA)$ |
| AC | 0 | 0 | L | 0 |
| AD | $-\sqrt{2}P/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}L$ | $-\sqrt{2}PL/(2EA)$ |
| BD | $-\sqrt{2}P/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}L$ | $\sqrt{2}PL/(2EA)$ |
| BE | 0 | 0 | L | 0 |
| CD | 0 | 0 | L | 0 |
| DE | 0 | 1 | L | 0 |
| 合計($u_E =$) | | | | $PL/(2EA)$ |

(7.27)

7.3.3 単位荷重法による梁の変形

梁の場合は、軸力およびせん断力による変形は小さいため、無視されることが多い。したがって、仮想仕事法（単位荷重法）の式は以下のように簡略化できる。

単位荷重法による梁の変形：

$$1 \cdot v = \sum_{k=1}^l \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx$$

$$1 \cdot \theta = \sum_{k=1}^l \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx \tag{7.28}$$

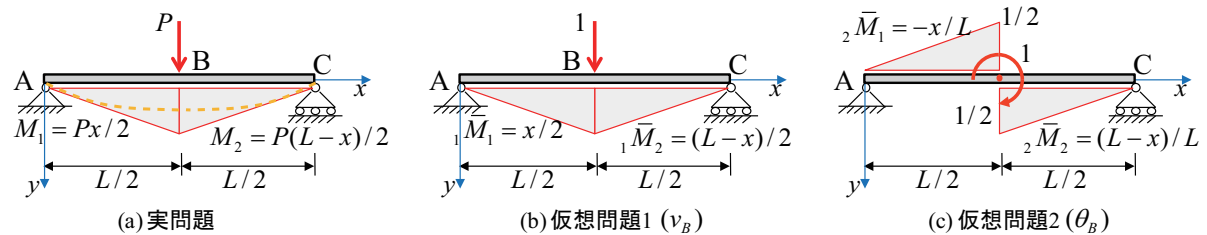


図 7.10 単純梁中央点のたわみ

例題としては、前節でも計算した図7.10に示す単純梁中央点 B のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求める（実）問題を考える。

例 7.4. 単位荷重法を用いて、図7.10 に示す単純梁中央点 B のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求めてください。

(実系において) B 点のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求めたいので、仮想問題としては下記の二つがある。

- 仮想問題 1: 単位荷重法を用いて、たわみ v_B を求めるため、B 点に下向き (たわみの正方向) の単位 (仮想) 集中荷重を作用する問題
- 仮想問題 2: 単位荷重法を用いて、たわみ角 θ_B を求めるため、B 点に時計回りの単位 (仮想) モーメント荷重を作用する問題

上記の二つの仮想問題に対して、それぞれの曲げモーメントを求め、実系の曲げモーメント分布とそれぞれ計算することによって B 点のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求める。

実問題と仮想問題における曲げモーメントの分布は、

$$\begin{aligned}
 \text{実問題: } & 0 \leq x \leq L/2 & M_1 &= Px/2 \\
 & L/2 \leq x \leq L & M_2 &= P(L-x)/2 \\
 \text{仮想問題 1: } & 0 \leq x \leq L/2 & {}_1\bar{M}_1 &= x/2 \\
 & L/2 \leq x \leq L & {}_1\bar{M}_2 &= (L-x)/2 \\
 \text{仮想問題 2: } & 0 \leq x \leq L/2 & {}_2\bar{M}_1 &= -x/L \\
 & L/2 \leq x \leq L & {}_2\bar{M}_2 &= (L-x)/L
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

となる。式 (7.28) を適用すれば、仮想問題 1 と実問題によって v_B を求める：

$$\begin{aligned}
 v_B = 1 \cdot v_B &= \int_0^{L/2} \frac{{}_1\bar{M}_1 M_1}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{{}_1\bar{M}_2 M_2}{EI} dx \\
 &= \int_0^{L/2} \frac{Px^2}{4EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{P(L-x)^2}{4EI} dx \\
 &= \left[\frac{Px^3}{12EI} \right]_0^{L/2} + \left[\frac{P(L^2x - Lx^2 + x^3/3)}{4EI} \right]_{L/2}^L \\
 &= \frac{PL^3}{48EI}
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

また、仮想問題 2 と実問題によって θ_B を求める：

$$\begin{aligned}
 \theta_B = 1 \cdot \theta_B &= \int_0^{L/2} \frac{{}_2\bar{M}_1 M_1}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{{}_2\bar{M}_2 M_2}{EI} dx \\
 &= \int_0^{L/2} \frac{-Px^2}{2EIL} dx + \int_{L/2}^L \frac{P(L-x)^2}{2EIL} dx \\
 &= \left[\frac{-Px^3}{6EIL} \right]_0^{L/2} + \left[\frac{P(L^2x - Lx^2 + x^3/3)}{2EIL} \right]_{L/2}^L \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

となり、前節の弾性曲線式およびモールの定理による結果と一致する。

単位荷重法による梁 (ラーメン構造にも適用) の変形を求めるには、以下のことを注意してほしい。

単位荷重法の注意点：

1. 仮想荷重の方向は、変位の正方向にかける。
2. 実問題でも仮想問題でも曲げモーメントの (仮定した) 正方向が同じにすれば、弾性曲線式のように、変位の正方向に合わせて曲げモーメントの正方向を定める必要がない。

3. 実問題の曲げモーメント分布と仮想問題の曲げモーメント分布の式によって、積分空間をさらに再分割される場合がある。

7.3.4 単位荷重法によるラーメン構造の変形

梁と同じように、ラーメン構造には曲げ（モーメントによる）変形が支配となり、せん断力および軸力による変形の量を無視されることが多い。²したがって、ラーメン構造の変形も式(7.28)を適用することができる。ラーメン構造の場合も、実系と仮想系との各計算空間における曲げモーメントの積と曲げ剛性(EI)の比を積分した総和で計算できる。

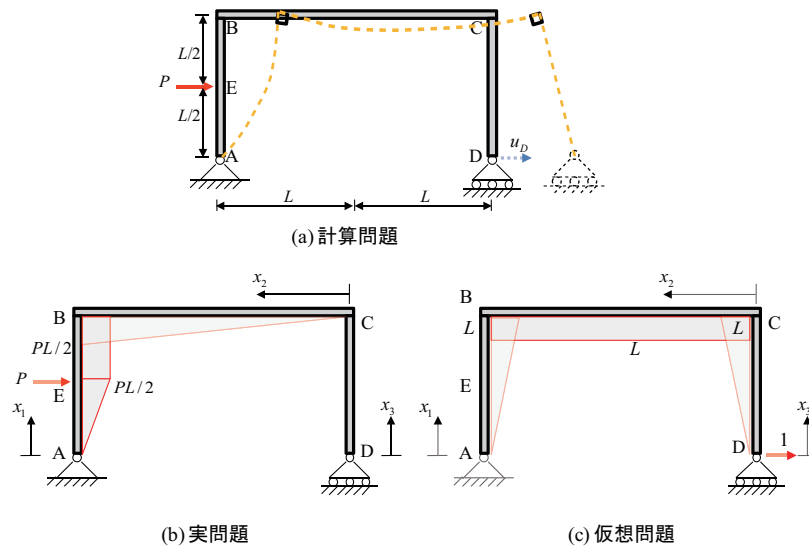


図 7.11 静定ラーメン構造の変位

静定ラーメン構造の例題としては、図7.11(a)のD点の水平変位 u_D を求める問題を考える。

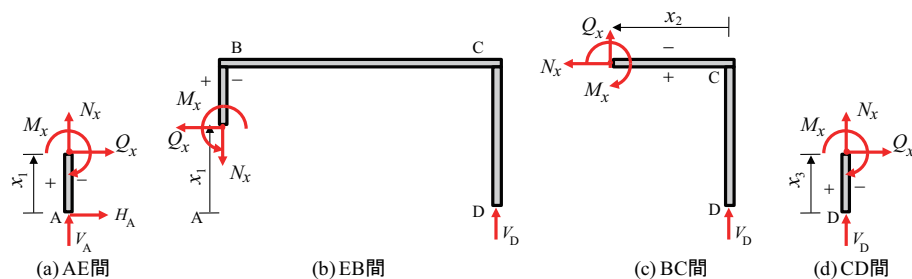


図 7.12 曲げモーメント正方向の定義

² これはあくまでも中小規模の建物に近似的に満たされるもので、超高層ビルなど超大規模の構造物には特に軸力による変形が無視できない場合がある。

例 7.5. 図7.11(a)のD点の水平変位 u_D を求めてください。ただし、各部材の曲げ剛性を同じ値とし、 EI とする。

D点の水平変位を求めたいため、D点に右向きの水平単位仮想荷重をかける。実問題と仮想(単位荷重)問題における曲げモーメントの分布図および局所座標系は、それぞれ図7.11(b)と(c)に示す。

各計算空間の曲げモーメントの正方向は、図7.12に示すように採用する。また、各計算空間に対して、曲げモーメントによって引張側を+、圧縮側を-とする。途中結果を省略するが、実問題と仮想問題の各計算空間における曲げモーメントの式は下記のようにまとめる。

| 区間 | 実問題 | 仮想問題 | |
|-------------------------------|--------------------|------------------------|--------|
| AE 間($0 \leq x_1 \leq L/2$) | $M_{x_1} = -Px_1$ | $\bar{M}_{x_1} = -x_1$ | (7.32) |
| EB 間($L/2 < x_1 \leq L$) | $M_{x_1} = -PL/2$ | $\bar{M}_{x_1} = -x_1$ | |
| BC 間($0 \leq x_2 \leq 2L$) | $M_{x_2} = Px_2/4$ | $\bar{M}_{x_2} = L$ | |
| CD 間($0 \leq x_3 \leq L$) | $M_{x_3} = 0$ | $\bar{M}_{x_3} = x_3$ | |

したがって、D点の水平変位 u_D は以下のように仮想仕事法を用いて計算できる。

$$\begin{aligned}
 u_D &= 1 \cdot u_D = \int_0^{L/2} \frac{(-Px_1)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_{L/2}^L \frac{(-PL/2)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{2L} \frac{(Px_2/4)(L)}{EI} dx_2 + \int_0^L \frac{(0)(x_3)}{EI} dx_3 \\
 &= \left[\frac{Px_1^3}{3EI} \right]_0^{L/2} + \left[\frac{PLx_1^2}{4EI} \right]_{L/2}^L + \left[\frac{PLx_2^2}{8EI} \right]_0^{2L} + 0 = \frac{35PL^3}{48EI}
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

ここで、変位は正であるというのは、仮定した右向きの変位となることを意味する。

ラーメン構造に仮想仕事法を適用した場合に、梁の変形計算に対する注意点と同じだが、実問題および仮想問題において、各計算空間の局所座標系および曲げモーメントの正方向は同じものを採用する必要がある。

7.4 宿題

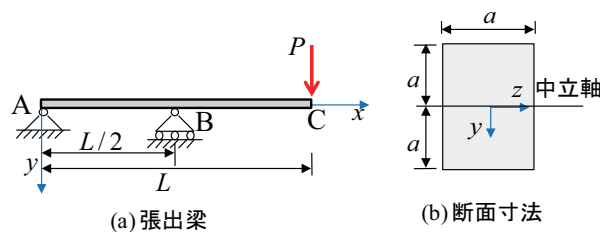


図 7.13 弾性曲線式の宿題：張出梁の変形と断面設計

Exercise 7.1. 図7.13(a)に示す張出梁に対して、以下の問を教えてください。

- 弾性曲線式を使って、C点のたわみ角およびたわみを求めてください。
- モールの定理によって、C点のたわみ角およびたわみを求めてください(オプション)。
- C点の最大変位を v_{\max} とした場合、図7.13(b)に示す断面に対して、必要最低限の幅 a を求めてください。

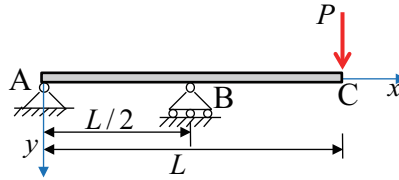


図 7.14 単位荷重法による張出梁の変形計算

Exercise 7.2. 図7.14に示す張出梁に対して、

1. 単位荷重法により、C点のたわみ v_C (鉛直方向変位) およびたわみ角 θ_C を求めてください。
2. 梁全体の変形図を描いてください。
3. C点の最大変位を v_{\max} とした場合、図7.13(b)に示す断面に対して、必要最低限の幅 a を求めてください。

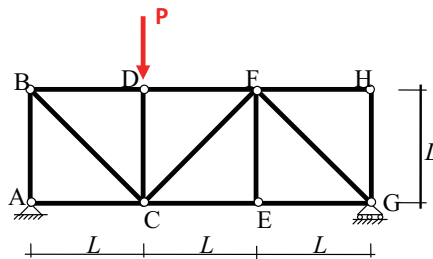


図 7.15 単位荷重法によるトラス構造の変形計算

Exercise 7.3. 図7.15に示すトラス構造に対して、

1. 単位荷重法を用いて、E点のたわみ v_E (鉛直方向変位) を求めてください。
2. トラス構造全体の変形図を描いてください。
3. E点の最大変位を v_{\max} 、各部材の断面剛性を EA とした場合に、必要最低限の断面剛性 EA を求めてください。

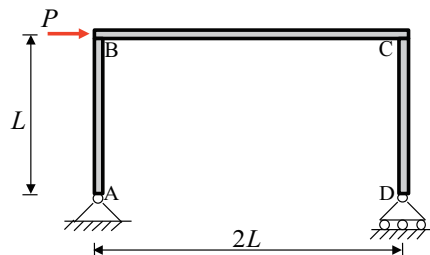


図 7.16 単位荷重法によるトラス構造の変形計算

Exercise 7.4. 図7.16に示すラーメン構造に対して、

1. 単位荷重法を用いて、D点の水平変位およびおよび回転角 θ_D を求めてください。

2. ラーメン構造全体の変形図を描いてください。
3. D 点の最大変位を v_{\max} とした場合、図7.13(b) に示す断面に対して、必要最低限の幅 a を求めてください。

Chapter 8 不静定構造の断面力

Abstract この章には、不静定構造を対象とし、仮想仕事法に基づいたその断面力を求める方法について説明する。その際に、力とモーメントの釣合い方程式のみで解けないため、仮想仕事を用いて変位を求め、変位の適合条件で不足の方程式を立てる必要がある。

8.1 不静定構造の定義と解法

中小規模の地震を想定した場合、構造物が損傷しないという機能性を確保するため、局所に生じる（最大）応力（度）は許容応力度以下となるように設計しないとできない。これは許容応力度設計法または一次設計の基本考え方である。

また、応力を計算するのに、断面力の分布が必要である。前章までは静定構造を対象として、力・モーメントの釣合い方程式のみですべての反力および断面力を求めてきた。しかし、静定構造は構造物の安定性を確保するために必要最低限の部材しかないので、例えば一本の部材が壊れてしまうと、構造物全体が崩壊する恐れがある。そのため、構造物の冗長性を増やすために、必要数以上の部材が使われているのは実用においてほとんどのケースである。

必要数以上の部材をもつ構造物の断面力および反力を求めるのに、力とモーメントの釣合い方程式のみでは解けない。こういった構造物は不静定構造と呼ばれている。

不静定構造の定義：

不静定構造とは、力・モーメントの釣合い方程式のみですべての反力および断面力を求めることができない構造物である。

ようするに、未知数の数は（釣合い）方程式の数より大きいので、そのままでは解けない。不静定構造が解けるようにするために、不足している分の方程式を立てるために、変位の適合条件を追加しないとできない。ここで、第7章で習った静定構造の変位を求める解法（単位荷重法）が必要となる。

不静定構造の断面力を求める基本的な考え方は以下のようなになる。説明を簡単にするため、一次不静定構造を例として説明し、構造物にかかる外力を P で表す。

仮想仕事法による不静定構造の計算手順：

1. 拡張 Maxwell's ルールを適用し、不静定次数を求める。
2. 不静定次数に相当する数の拘束を解放することによって、不静定構造を静定基本形に変換する。この場合、解放された自由度に（未知の）外力 X を加える。
3. 静定基本形に対して、外力 P および未知外力 X による解放自由度の変位 u_P と u_X をそれぞれ求める。
4. 静定基本形における u_P と u_X による総合効果は、原問題での u と同じにならないとできない。したがって、

$$u_P + u_X = u \quad (8.1)$$

という変位に関する方程式が立てられる。

5. 上記の変位適合条件と力・モーメントの釣合い方程式と連立し、未知の外力 X を求める。
6. 変換された静定構造に対して、外力 P および X が同時にかかるときの断面力を求める。

ここで、解放される自由度の数は構造物の不静定次数と同じでないと静定基本形にならない。高次不静定構造の場合に、本章で紹介する方法はややこしくなるので、次章にはより実用的なたわみ角法について説明する。

8.2 不静定トラス構造

トラス構造の場合には、Maxwell's ルール式 (4.4) はそのまま適用できる。例えば、図8.1(a) に示す不静定トラス構造に対して、節点 B の水平方向の変位を經由して、部材の軸力を求める問題を考える。

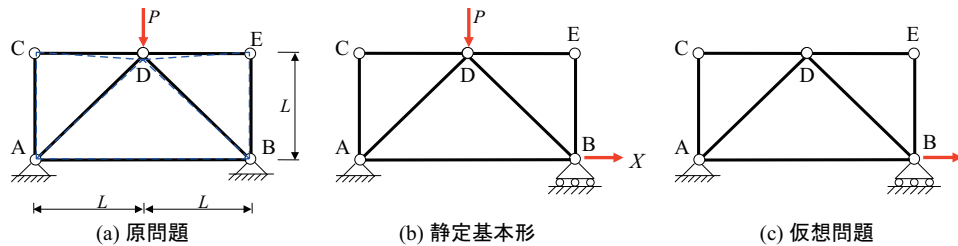


図 8.1 不静定トラス構造の例題

例 8.1. 図8.1(a) に示すトラス構造に対して

- (a) Maxwell's ルールによりこのトラス構造の静定性を判定し、不静定の場合にその不静定次数を明記してください。
- (b) 仮想仕事法によってこの構造の軸力を求めてください。

ただし、各部材の軸剛性を同じように EA とする。

□

小問 (a)

図8.1(a) のトラス構造は、7本の部材 ($m=7$)、5個の節点 ($n=5$) および4つの反力 ($p=4$) があるので、Maxwell's ルール式 (4.4) を適用すれば、

$$m - n \times d + p = 7 - 5 \times 2 + 4 = 1 \quad (8.2)$$

したがって、このトラス構造は一次不静定である。

小問 (b)

一次不静定構造を静定基本形に変換するため、一つの拘束された自由度 (反力) を解放する必要がある。ここで、B 点の水平方向の変位を解放とし、その静定基本形は図8.1(b) で示す。もともとの B 点の水平方向にかかっている反力 H_B を外力 X とする。X はいまのところ未知数である。

反力の数が一つ少なくなり、図8.1(b) に示す変換されたトラス構造に対して Maxwell's ルールを適用した結果はゼロとなるため、静定であることを意味する。これは、図8.1(b) の構造物を静定基本形と呼ばれる理由である。

外力 P と X による B 点の水平変位 u_B^P と u_B^X を求めるには、第 7 章に説明した仮想仕事の原理に基づいた単位荷重法を使えばよい。したがって、図 8.1(c) に示すように、B 点の水平方向に単位荷重を加える仮想問題を考える。

計算の途中結果を省略するが、変換された静定基本形にかかる外力 P および X による各部材の軸力 N_k^P と N_k^X 、また仮想問題における各部材の軸力 \bar{N}_k を式 (8.7) にまとめる。

| 部材 | N_k^P | N_k^X | \bar{N}_k | L_k | $\frac{N_k^P \bar{N}_k L_k}{EA}$ | $\frac{N_k^X \bar{N}_k L_k}{EA}$ |
|---------------------|----------------|---------|-------------|-------------|----------------------------------|----------------------------------|
| AB | $P/2$ | X | 1 | $2L$ | $PL/(EA)$ | $2XL/(EA)$ |
| AC | 0 | 0 | 0 | L | 0 | 0 |
| AD | $-\sqrt{2}P/2$ | 0 | 0 | $\sqrt{2}L$ | 0 | 0 |
| BD | $-\sqrt{2}P/2$ | 0 | 0 | $\sqrt{2}L$ | 0 | 0 |
| BE | 0 | 0 | 0 | L | 0 | 0 |
| CD | 0 | 0 | 0 | L | 0 | 0 |
| DE | 0 | 0 | 0 | L | 0 | 0 |
| 合計($u_B^{P,X} =$) | | | | | $PL/(EA)$ | $2XL/(EA)$ |

図 8.1(a) に示す原問題においては、B 点が拘束されているため、外力 P が加えてもその水平変位 u_B がゼロであるはず。したがって、B 点の水平変位を解放された静定基本形は原問題との対応関係によって、 P と X による B 点の変位 u_B^P と u_B^X の総合効果 (和) は、原問題における u_B と同じとなり、以下の変位の適合条件が得られる。

$$u_B^P + u_B^X = u_B = 0 \quad (8.4)$$

式 (8.3) で計算した u_B^P と u_B^X をそれぞれ上記の式に代入すると、未知の外力 X (原問題の反力 H_B) は、以下のように求めることができる。

$$u_B^P + u_B^X = \frac{L}{EA}P + \frac{2L}{EA}X = 0 \quad (8.5)$$

$$\Rightarrow X = -\frac{P}{2} \quad (\leftarrow) \quad (8.6)$$

したがって、外力 P と反力 $X (= -P/2)$ が同時に作用したときの各部材の軸力は以下のように計算できる。

| 部材 | N_k^P | N_k^X | $N_k = N_k^P + N_k^X$ |
|----|----------------|---------|-----------------------|
| AB | $P/2$ | $-P/2$ | 0 |
| AC | 0 | 0 | 0 |
| AD | $-\sqrt{2}P/2$ | 0 | $-\sqrt{2}P/2$ |
| BD | $-\sqrt{2}P/2$ | 0 | $-\sqrt{2}P/2$ |
| BE | 0 | 0 | 0 |
| CD | 0 | 0 | 0 |
| DE | 0 | 0 | 0 |

部材 AB の軸力がゼロとなっているが、その両側に拘束されているため、AB の軸力はほかの部材の軸力と無関係であるため、その軸力は任意となる。

8.3 不静定梁

不静定梁の断面力も、不静定トラス構造のと同様で計算できる。ただし、梁の不静定次数の判定は、式 (5.1) の拡張 Maxwell's ルールを適用する。その際に、梁の回転拘束を適切に解放し、トラスモデルに変換する必要がある。たとえば、図 8.2 に示す不静定梁の曲げモーメント分布を求める問題を考える。

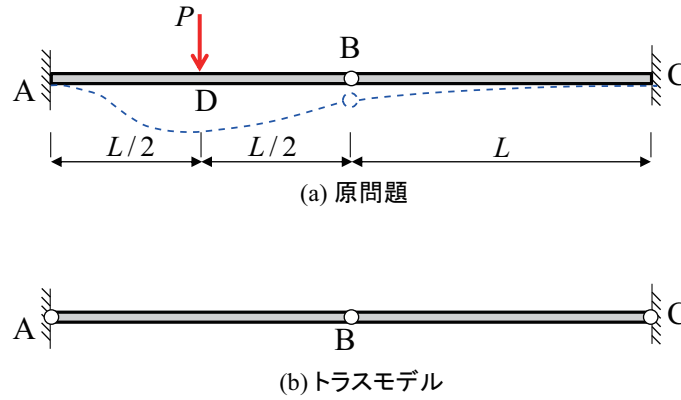


図 8.2 不静定梁の例題

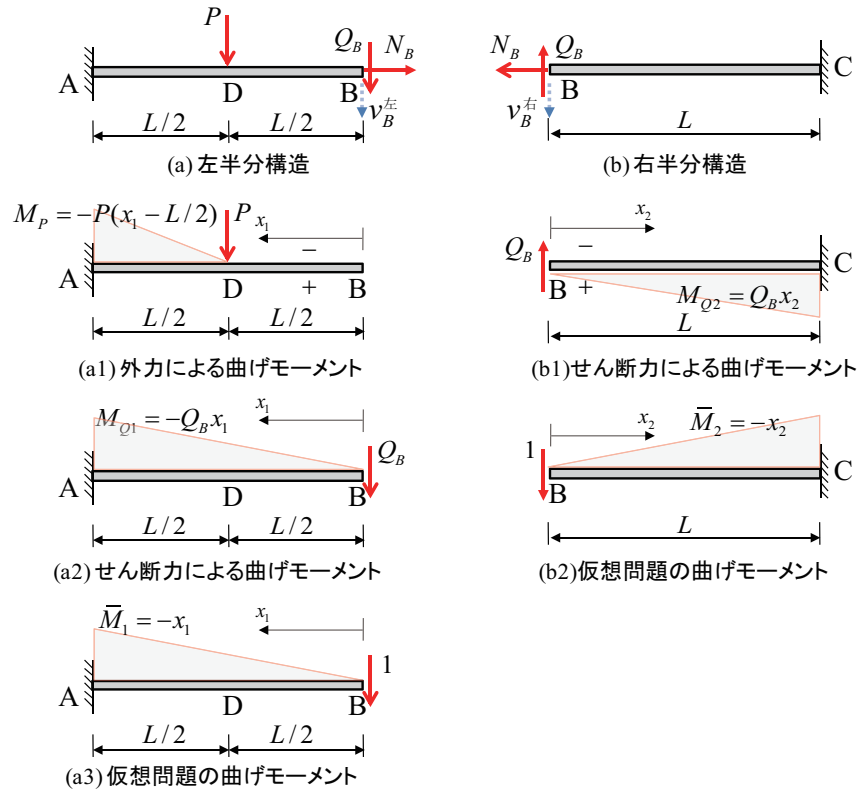


図 8.3 不静定梁の断面力計算

例 8.2. 図8.2(a) に示す梁に対して

- (a) この梁の静定性を判定し、不静定の場合にはその不静定次数を明記してください。
- (b) この梁の曲げモーメント分布を求めてください。

ただし、曲げ剛性は EI となる。軸変形とせん変形を無視する。

□

小問 (a)

図8.2(a) に示す梁をトラスモデルに変換するため、図8.2(b) に示すように両側の固定支点の回転を解放する。したがって、トラスモデルには部材数 m が 2、節点数 n は 3、反力数 p は

4. 解放された回転数 q は 2 である。式 (5.1) の拡張 Maxwell's ルールによると、その不静定次数は

$$m - n \times d + p + q = 2 - 3 \times 2 + 4 + 2 = 2 \quad (8.8)$$

となり、この不静定梁は、2 次不静定構造である。しかし、2 本の部材が一直線にあり、曲げモーメントの分布を求める際に、軸変形を無視できるため、この梁は実質的に 1 次不静定構造として考えてよい。

小問 (b)

不静定梁を静定基本形に変換するのに、ここで、B 点を仮想的に切断する。そうすると、図 8.3(a),(b) に示す左半分も右半分も静定の片持ち梁となる。B 点はピン接合であり、曲げモーメントがゼロのため、未知数は、B 点にかかるせん断力 Q_B と軸力 N_B である。

また、その左半分モデルも右半分モデルも、前半の内容で取り扱っている片持ち梁であるため、明らかにそれぞれ静定構造である。未知数力（反力または断面力）を「既知」として、不静定構造物を静定基本形に変換し、変換前後において変位の適合条件を使って方程式を立てるのは、不静定構造を解くポイントとなる。

図からでも分かるように、軸力 N_B による曲げモーメントは無視できるため、せん断力 Q_B のみを未知数として考慮すればよい。左半分および右半分構造の外力、せん断力および B 点の変位を求めるための仮想問題における曲げモーメントの分布は以下のようになる。

| 区間 | モーメント | | |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------------|------------------------|
| | P による | Q_B による | 単位荷重による |
| DB 間($0 \leq x_1 \leq L/2$) | $M_P = 0$ | $M_{Q_1} = -Q_B \cdot x_1$ | $\bar{M}_1 = -x_1$ |
| AD 間($L/2 < x_1 \leq L$) | $M_P = -P(x_1 - L/2)$ | $M_{Q_1} = -Q_B \cdot x_1$ | $\bar{M}_{x_1} = -x_1$ |
| BC 間($0 \leq x_2 \leq L$) | | $M_{Q_2} = Q_B \cdot x_2$ | $\bar{M}_2 = -x_2$ |

ここで、梁の下側は引張側となる曲げモーメントを正とする。

左半分と右半分の計算モデルに対して、外力荷重 P による B 点のたわみ v_B^P およびせん断力 Q_B による左と右半分における B 点のたわみ $v_B^{Q_1}$ と $v_B^{Q_2}$ は、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} v_B^P &= \int_0^L \frac{M_P \bar{M}_1}{EI} dx_1 = \int_0^{L/2} \frac{0 \cdot (-x_1)}{EI} + \int_{L/2}^L \frac{[-P(x_1 - L/2)] \cdot (-x_1)}{EI} dx_1 = \frac{5PL^3}{48EI} \\ v_B^{Q_1} &= \int_0^L \frac{M_{Q_1} \bar{M}_1}{EI} dx_1 = \int_0^L \frac{(-Q_B x_1) \cdot (-x_1)}{EI} dx_1 = \frac{Q_B L^3}{3EI} \\ v_B^{Q_2} &= \int_0^L \frac{M_{Q_2} \bar{M}_2}{EI} dx_2 = \int_0^L \frac{(Q_B x_2) \cdot (-x_2)}{EI} dx_2 = -\frac{Q_B L^3}{3EI} \end{aligned} \quad (8.10)$$

左半分において B 点のたわみは $v_B = v_B^P + v_B^{Q_1}$ であり、右半分において B 点のたわみは $v_B = v_B^{Q_2}$ 同じでなければ、梁構造は壊れてしまうため、せん断力は以下ようになる。

$$v_B = v_B^P + v_B^{Q_1} = v_B = v_B^{Q_2} \quad (8.11)$$

$$\Rightarrow \frac{5PL^3}{48EI} + \frac{Q_B L^3}{3EI} = -\frac{Q_B L^3}{3EI} \quad (8.12)$$

$$\Rightarrow Q_B = -\frac{5}{32}P \quad (8.13)$$

不静定梁の全体の曲げモーメントは、以下のように求められる。

| 区間 | 曲げモーメント |
|-------------------------------|---|
| DB 間($0 \leq x_1 \leq L/2$) | $M = M_P + M_{Q_1} = -Q_B x_1 = \frac{5}{32}P x_1$ |
| AD 間($L/2 < x_1 \leq L$) | $M = M_P + M_{Q_1} = -P(x_1 - L/2) - Q_B x_1 = -\frac{27}{32}P x_1 + \frac{1}{2}PL$ |
| BC 間($0 \leq x_2 \leq L$) | $M = M_{Q_2} = Q_B x_2 = -\frac{5}{32}P x_2$ |

その曲げモーメントの分布図は図8.4に示す。図より、左の固定端の曲げモーメントは片持ち梁のみの $PL/2$ より小さいため、右半分の梁もその一部外力を負担していることが分かる。

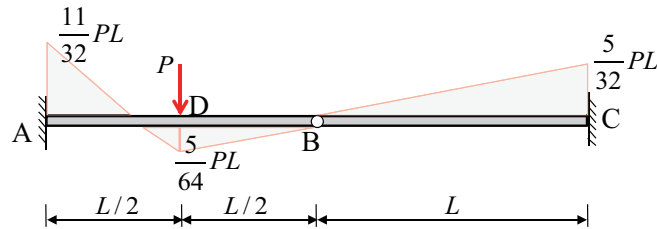


図 8.4 一次不静定梁の曲げモーメント分布図

8.4 不静定ラーメン構造

不静定ラーメン構造の断面力（主に曲げモーメント）は、梁と同じように求めることができる。計算空間が多くなるのは特徴である。例えば、図8.5(a)に示す（一次不静定）ラーメン構造を考える。

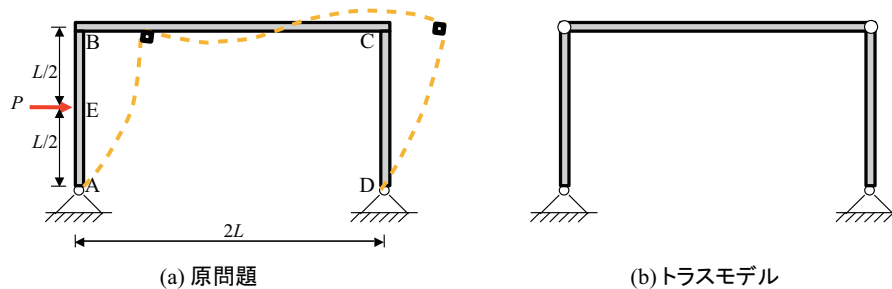


図 8.5 不静定ラーメン構造の例題

例 8.3. 図8.5(a)に示すラーメン構造に対して

- このラーメン構造の静定性を判定し、不静定の場合にはその不静定次数を明記してください。
- このラーメン構造の曲げモーメント分布を求めてください。

ただし、各部材の曲げ剛性は同じく EI とする。

□

小問 (a)

原問題の図8.5(a)をトラスモデルに変換するため、図8.5(b)に示すように B 点と C 点の回転を解放する。図8.5(b)のトラスモデルには、部材数 m が 3、節点数 n が 4、反力の数 p が 4、解放された回転の数 q が 2 となるため、

$$m - n \times d + p + q = 3 - 4 \times 2 + 4 + 2 = 1 \quad (8.15)$$

となり、このラーメン構造は 1 次不静定である。

小問 (b)

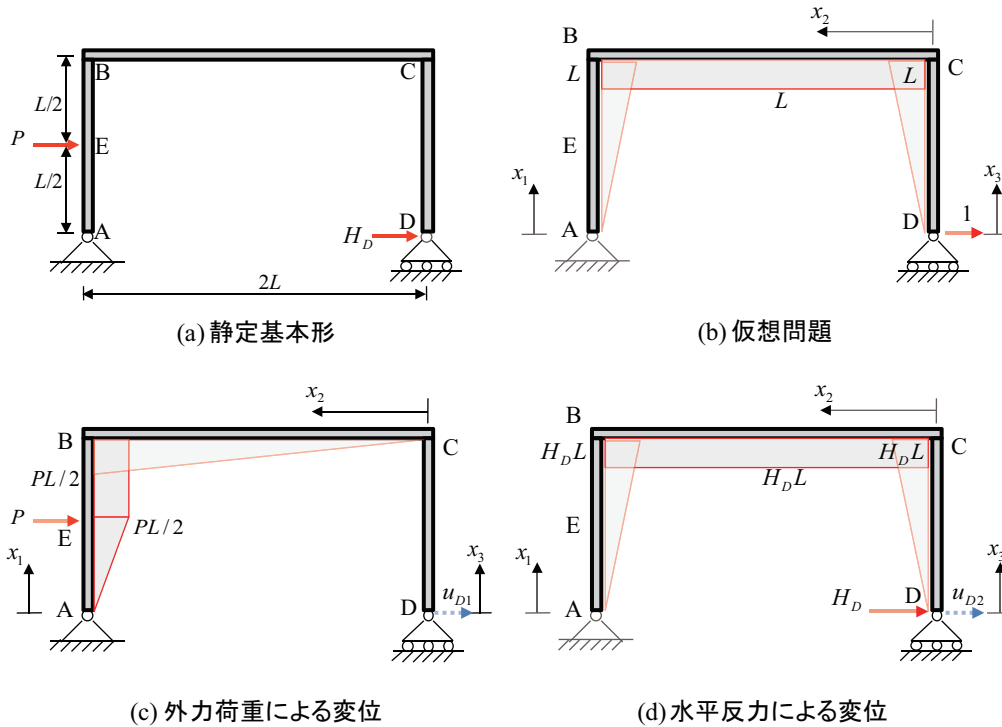


図 8.6 一次不静定ラーメン構造

一次不静定のラーメン構造を静定基本形に変換するため、一つの自由度を解放する必要がある。ここで、図8.6(a)に示すように、D点の水平変位を解放し、その反力 H_D を外力荷重とする。

従って、もとの不静定構造の計算問題は、図8.6(c)と(d)に示すような静定基本形に外力荷重 P および H_D が作用する問題となる。それぞれ問題における D 点の水平変位 u_{D1} と u_{D2} の総和は、ゼロとなる：

$$u_{D1} + u_{D2} = 0 \tag{8.16}$$

これは、変換された静定基本形の問題は、もとの不静定構造の問題と一致しないといけない。もとの不静定構造の問題においては、D 点の水平変位はピン支持によって拘束されているため、静定基本形の問題において、外力荷重 P および H_D による D の水平変位の総和はゼロとしないとできない。

静定基本形の変位問題は、第 7 章で説明した単位荷重法が適用できる。図7.12に示す局所座標系と曲げモーメントの正方向を採用する。D 点の水平変位を求めるため、静定基本形において D 点の水平方向に大きさ 1 の単位荷重が作用する仮想問題(図8.6(b))を考える。

静定基本形において、外力荷重 P (図8.6(c))、 H_D (図8.6(d))、および単位荷重(図8.6(b))による曲げモーメントの分布は、以下のようにまとめられる。

| 区間 | 問題 1：荷重 P | 問題 2：荷重 H_D | 仮想問題 |
|--------------------------------|------------------------|--------------------------|------------------------|
| AE 間 ($0 \leq x_1 \leq L/2$) | ${}_1M_{x_1} = -Px_1$ | ${}_2M_{x_1} = -H_D x_1$ | $\bar{M}_{x_1} = -x_1$ |
| EB 間 ($L/2 < x_1 \leq L$) | ${}_1M_{x_1} = -PL/2$ | ${}_2M_{x_1} = -H_D x_1$ | $\bar{M}_{x_1} = -x_1$ |
| BC 間 ($0 \leq x_2 \leq 2L$) | ${}_1M_{x_2} = Px_2/4$ | ${}_2M_{x_2} = H_D L$ | $\bar{M}_{x_2} = L$ |
| CD 間 ($0 \leq x_3 \leq L$) | ${}_1M_{x_3} = 0$ | ${}_2M_{x_2} = H_D x_3$ | $\bar{M}_{x_3} = x_3$ |

外力荷重 P による D 点の水平変位 u_{D1} は、前章の式 (7.33) を使った。単位荷重法によると、外力荷重 P による D 点の水平変位 u_{D2} は、以下のように求める。

$$\begin{aligned}
 u_{D2} &= 1 \cdot u_{D2} = \int_0^L \frac{(-H_D x_1)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{2L} \frac{(H_D L)(L)}{EI} dx_2 + \int_0^L \frac{(H_D x_3)(x_3)}{EI} dx_3 \\
 &= \left[\frac{H_D x_1^3}{3EI} \right]_0^L + \left[\frac{H_D L^2 x_2}{EI} \right]_0^{2L} + \left[\frac{H_D x_3^3}{3EI} \right]_0^L = \frac{8H_D L^3}{3EI}
 \end{aligned} \quad (8.18)$$

変位適合条件の式(8.16)によると、反力 H_D は以下のように求められる。

$$u_{D1} + u_{D2} = \frac{35PL^3}{48EI} + \frac{8H_D L^3}{3EI} = 0 \quad (8.19)$$

$$\Rightarrow H_D = -\frac{35}{128}P \quad (\leftarrow) \quad (8.20)$$

もとの不静定構造の曲げモーメント M は、静定基本形の外力 P と H_D によるものの総和であるため、その式は

| 区間 | 曲げモーメント | |
|--------------------------------|---|--------|
| AE 間 ($0 \leq x_1 \leq L/2$) | $M_{x_1} = -Px_1 - H_D x_1 = -\frac{93}{128}Px_1$ | (8.21) |
| EB 間 ($L/2 < x_1 \leq L$) | $M_{x_1} = -PL/2 - H_D x_1 = -\frac{1}{2}PL + \frac{35}{128}Px_1$ | |
| BC 間 ($0 \leq x_2 \leq 2L$) | $M_{x_2} = Px_2/4 + H_D L = \frac{1}{4}Px_2 - \frac{35}{128}PL$ | |
| CD 間 ($0 \leq x_3 \leq L$) | $M_{x_3} = 0 + H_D x_3 = -\frac{35}{128}Px_3$ | |

となり、不静定構造の曲げモーメント分布図は図8.7に示す。

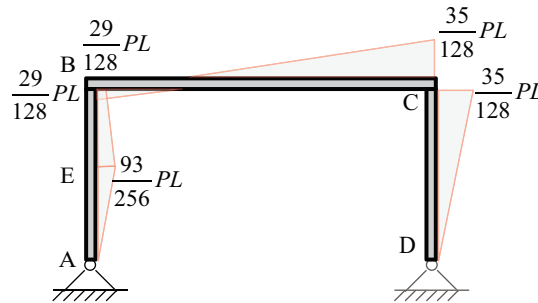


図 8.7 一次不静定ラーメン構造の曲げモーメント分布図

8.5 宿題

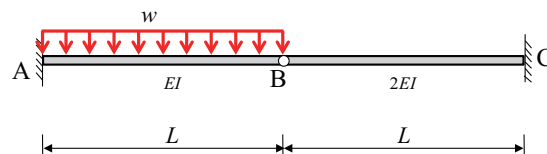


図 8.8 梁の曲げモーメント計算問題

Exercise 8.1. 図8.8の梁に対して

(a) この梁の静定性を判定し、不静定の場合にその不静定次数を明記してください。

- (b) この梁を一次不静定構造として、その曲げモーメント分布を求めてください。
 (c) この梁の変形図を描いてください。

ただし、部材 AB の曲げ剛性を EI 、部材 BC の曲げ剛性を $2EI$ とする。

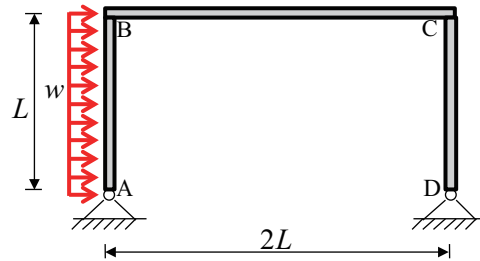


図 8.9 ラーメン構造の曲げモーメント計算問題

Exercise 8.2. 図8.9のラーメン構造に対して

- (a) このラーメン構造の静定性を判定し、不静定の場合にその不静定次数を明記してください。
 (b) このラーメン構造の曲げモーメント分布を求めてください。
 (c) このラーメン構造の変形図を描いてください。

ただし、すべての部材曲げ剛性を EI とする。

Chapter 9 たわみ角法

Abstract 前章で説明した仮想仕事法を用いて不静定次数の高い構造物を解くには、計算がかなり複雑となる。その場合には、本章で紹介するたわみ角法が適用できる。

9.1 基本式

ラーメン構造に対しては、軸力とせん断力による変形が小さいため、変形の計算上は無視できる。(しかし、応力の計算では無視できない場合がある。) さらに、ラーメン構造は線形的な部材(柱、梁)で構成されているので、共通である線形的部材の曲げによる変形を定式化できる。これはたわみ角法の基本的な考え方である。

たわみ角法では、梁端部の曲げモーメントとたわみ角(回転角)の関係を利用し、節点におけるモーメントに関する連立釣合い方程式を解くことによって、たわみ角を求め、さらに曲げモーメントを求めることができる。

梁 AB 両端部の全体のたわみ角(回転角)を θ_{AB} と θ_{BA} で表す。そのうち、曲げモーメントのみによる回転角を α_{AB} と α_{BA} 、中間荷重による回転角を γ_{AB} と γ_{BA} 、節点移動による回転角を R で表す。これらの回転角の間に、下記の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\theta_{AB} &= \alpha_{AB} + \gamma_{AB} + R \\ \theta_{BA} &= \alpha_{BA} + \gamma_{BA} + R\end{aligned}\tag{9.1}$$

9.1.1 梁端曲げモーメントによる回転角 α_{AB} と α_{BA}

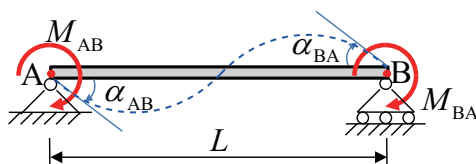


図 9.1 梁端曲げモーメントと回転角

α_{AB} と α_{BA} を求めるため、図9.1に示す単純梁 AB の両端部に曲げモーメント M_{AB} と M_{BA} をかける問題を考える。詳細が省略するが、(弾性曲線式、モールの定理または仮想仕事法のいずれによって) α_{AB} と α_{BA} は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} &= \frac{M_{AB}L}{3EI} - \frac{M_{BA}L}{6EI} \\ \alpha_{BA} &= -\frac{M_{AB}L}{6EI} + \frac{M_{BA}L}{3EI}\end{aligned}\quad (9.2)$$

ここで、曲げモーメントもたわみ角も時計回りを正方向とする。
上記の式を整理すると、以下のようにまとめられる。

節点移動がない場合の梁端曲げモーメント M_{AB} , M_{BA} とたわみ角 θ_{AB} , θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA})\end{aligned}\quad (9.3)$$

ここで、曲げ剛性 EI と長さ L の比 EI/L は部材剛度 (Member Stiffness) と呼ばれる。

式9.3よりも分かるように、同じ剛接合の節点につながっている部材に対して、剛度の高い部材に大きな曲げモーメントは負担される。また、大きい括弧外の式は、たわみ角法の基本式となる。曲げモーメントのみによる回転角を考える場合には、全体たわみ角に一致するので、大きい括弧でもよい。しかし、場合によって、節点移動の有無および中間荷重による回転角も考慮する必要がある。

9.1.2 節点移動と回転角

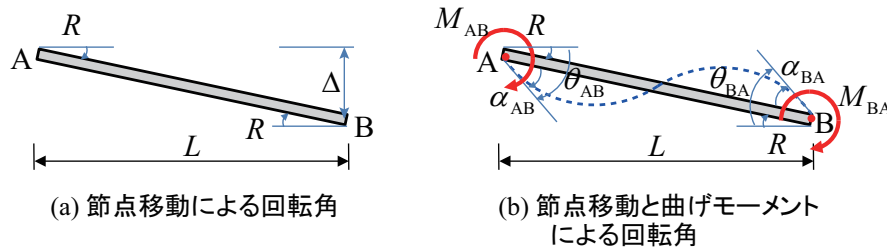


図 9.2 節点移動および曲げモーメントと回転角

曲げモーメントがなくても、梁端部の (材軸と直交する方向の) 移動によって、回転角が生じることがある。例えば、図9.2(a)には、節点の移動によって回転角 R が生じる。図9.2(b)のように、両側に曲げモーメントをさらにかけると、曲げモーメントによる回転角 α_{AB} , α_{BA} は、両端部の全体のたわみ角 θ_{AB} , θ_{BA} から節点の移動による回転角 R を引くとなるため、以下の式で表せる。

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} &= \theta_{AB} - R, \\ \alpha_{BA} &= \theta_{BA} - R\end{aligned}\quad (9.4)$$

節点の材軸と直交する方向の移動 Δ によって生じた変位角 R は以下の式で計算できる。

$$R \cdot L = \Delta \implies R = \frac{\Delta}{L}\quad (9.5)$$

たわみ角法の基本式 (9.3) に代入すると、材軸と直交する方向に節点移動のある場合の式は以下のようなになる。

節点移動がある場合の梁端曲げモーメント M_{AB}, M_{BA} とたわみ角 θ_{AB}, θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} + 2\theta_{BA} - 6R) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} + 4\theta_{BA} - 6R) \end{aligned} \quad (9.6)$$

節点移動の有無およびその数については、変換されたトラスモデルの不安定次数によって判断できる。変換されたトラスモデルが安定の場合、元のラーメン構造には節点移動が存在しない。また、変換されたトラスモデルが n 次不安定の場合には、元のラーメン構造には n 個の節点移動が存在し、実際の計算ではそれを考慮しなければならない。

9.1.3 中間荷重と回転角

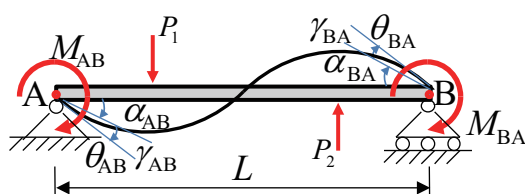


図 9.3 中間荷重による回転角

図9.3に示すように、単純梁の両側にモーメントがかからなくても、梁の中間に荷重（例えば図の中の P_1, P_2 ）を加えると、両端部にも回転角 γ_{AB}, γ_{BA} が生じる。

節点の移動を考慮しない場合に、梁 AB 両端部の曲げモーメントによる回転角 α_{AB}, α_{BA} は、

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} &= \theta_{AB} - \gamma_{AB}, \\ \alpha_{BA} &= \theta_{BA} - \gamma_{BA} \end{aligned} \quad (9.7)$$

となり、たわみ角法の基本式 (9.3) に代入すると、以下のようにまとめられる。

中間荷重がある場合の梁端曲げモーメント M_{AB}, M_{BA} とたわみ角 θ_{AB}, θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} - 4\gamma_{AB} + 2\theta_{BA} - 2\gamma_{BA}) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} - 2\gamma_{AB} + 4\theta_{BA} - 4\gamma_{BA}) \end{aligned} \quad (9.8)$$

ここで、注意されたいのは、中間荷重による回転角 γ_{AB}, γ_{BA} は未知数ではなく、単位荷重法などを使って、中間荷重に対応するものとして計算できる。

9.1.4 回転角と曲げモーメントの一般式

節点の移動と中間荷重を考える場合に、図 9.4に示すように両端部曲げモーメントによる回転角 α_{AB}, α_{BA} は、

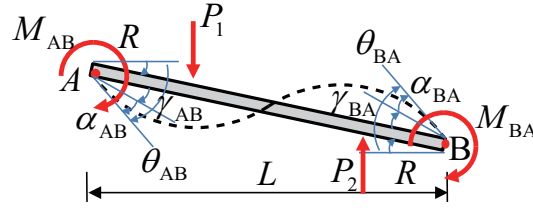


図 9.4 節点移動と中間荷重を考慮した場合の曲げモーメントと回転角

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} &= \theta_{AB} - \gamma_{AB} - R, \\ \alpha_{BA} &= \theta_{BA} - \gamma_{BA} - R\end{aligned}\quad (9.9)$$

となり、たわみ角法の基本式 (9.3) に代入すると、以下のようにまとめられる。

節点移動および中間荷重がある場合の梁端曲げモーメント M_{AB} , M_{BA} とたわみ角 θ_{AB} , θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} - 4\gamma_{AB} + 2\theta_{BA} - 2\gamma_{BA} - 6R) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} - 2\gamma_{AB} + 4\theta_{BA} - 4\gamma_{BA} - 6R)\end{aligned}\quad (9.10)$$

9.1.5 Remarks

梁端の曲げモーメント M_{AB} , M_{BA} とそれによるたわみ角 α_{AB} , α_{BA} との間に一定の関係式があるが、節点移動による（剛体）回転角 R および中間荷重による回転角 γ_{AB} , γ_{BA} とは無関係である。したがって、 M_{AB} , M_{BA} と α_{AB} , α_{BA} との関係式の中で、全体のたわみ角 θ_{AB} , θ_{BA} から R および γ_{AB} , γ_{BA} を引く必要がある。

たわみ角法による（不静定）構造の計算手順：

1. 各部材に対して、回転角（たわみ角）と両端部曲げモーメントの関係式を書く。
2. 各節点に対して、曲げモーメントの釣り合い方程式を立てる。
3. 連立方程式により未知数である回転角を求める。
4. 回転角により各部材両端部の曲げモーメントを求める。
5. 中間荷重による曲げモーメントを含め、各部材の曲げモーメント分布図を描く。

9.2 節点移動なし

節点移動なしの不静定ラーメン構造の例題としては、図9.5の構造物を考える。

例 9.1. 図9.5に示すラーメン構造の不静定次数を求めてください。

図 9.6に示すようなトラスモデルに変換するため、六つの剛接合をピン接合に変えた。すなわち、 $q=6$ 。しかし、C 点の二つのピン接合は実質的に一つのピン接合として働いているので、節点の数は $n=5$ 、部材数は $m=4$ 、反力の数は $p=6$ である。Maxwell's ルールを適用すると、

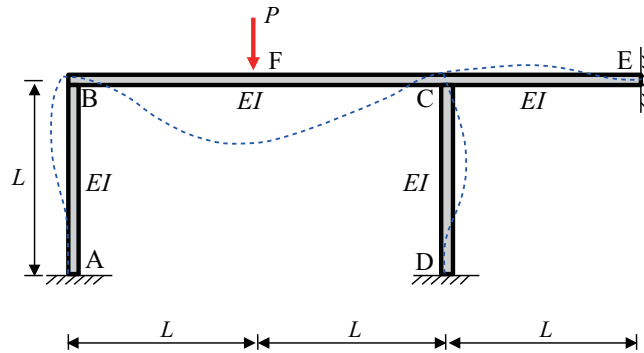


図 9.5 節点移動なしの不静定ラーメン構造

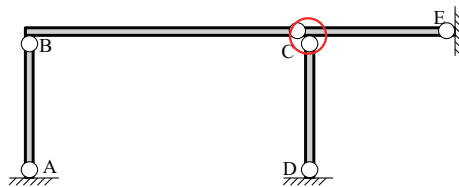


図 9.6 図 9.5の不静定次数を計算するためのトラスモデル。

$$m - d \times n + p + q = 4 - 2 \times 5 + 6 + 6 = 6 \quad (9.11)$$

となるため、このラーメン構造はこのラーメン構造は 6 次不静定である。

前章の方法によっては、六つの変位適合条件を立てないとできないため、解きにくい問題である。しかし、以下の例題で示すように、たわみ角法を適用した場合に、比較的解くことができる。さらに、たわみ角法を適用する場合、(ラーメン) 構造物の不静定次数に関係ない。

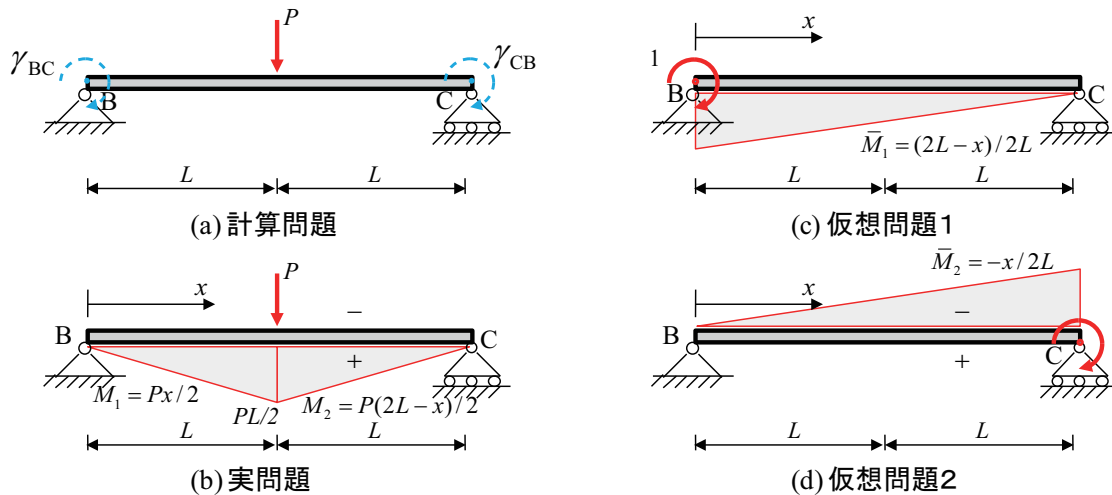


図 9.7 BC 間の中間荷重による回転角

例 9.2. 図 9.5 に示すラーメン構造の曲げモーメント分布を求めてください。ただし、すべての部材の曲げ剛性を EI とする。

図 9.6 に示す変換されたトラスモデルに対して、節点の数は $n = 5$ 、部材数は $m = 4$ 、反力の数は $p = 6$ である。Maxwell's ルールを適用して、その不安定次数は以下のように求められる。

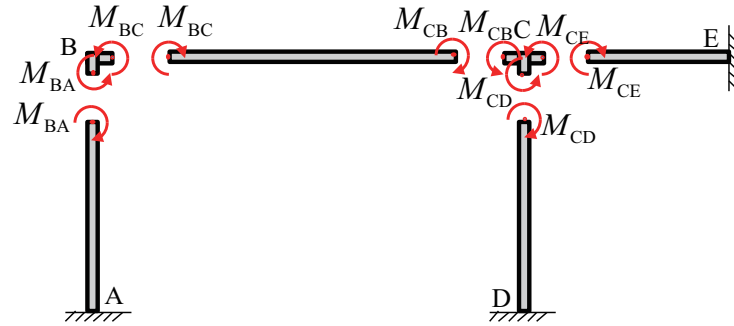


図 9.8 節点における曲げモーメント

$$m - d \times n + p = 4 - 2 \times 5 + 6 = 0 \quad (9.12)$$

このトラスモデルは安定であり（不安定次数がゼロ）、それに対応している元のラーメン構造には節点移動が存在しない。ここで注意されたいのは、変換されたトラスモデルの安定性を調べているので、ラーメン構造をトラスモデルに変換される際に解放された自由度数はカウントされない。

節点移動なしというのは、各部材の材軸と直交する方向への移動が（支点によって）拘束されている。図 9.6 に示すようなトラスモデルによると、各部材の材軸と直交する方向への移動ができないため、節点移動なしの問題となる。

部材 BC の間に中間荷重 P が作用しているため、中間荷重による両端部の回転角 γ_{BC}, γ_{CB} を求める必要がある。そのため、図 9.7 の計算モデルを考える。単位荷重法によって、中間荷重による回転角は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \gamma_{BC} &= \int_0^L \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{M_2 \bar{M}_1}{EI} dx \\ &= \int_0^L \frac{(Px/2)[(2L-x)/2L]}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{[P(2L-x)/2][(2L-x)/2L]}{EI} dx \\ &= \frac{PL^2}{4EI} \\ \gamma_{CB} &= \int_0^L \frac{M_1 \bar{M}_2}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx \\ &= \int_0^L \frac{(Px/2)(-x/2L)}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{[P(2L-x)/2](-x/2L)}{EI} dx \\ &= -\frac{PL^2}{4EI} \end{aligned} \quad (9.13)$$

たわみ角法の基本式を適用し、各部材両端部の曲げモーメントと回転角は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} + 2\theta_{BA}) = 2\frac{EI}{L}\theta_B \\
M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} + 4\theta_{BA}) = 4\frac{EI}{L}\theta_B \\
M_{BC} &= \frac{EI}{2L}(4\theta_{BC} - 4\gamma_{BC} + 2\theta_{CB} - 2\gamma_{CB}) = \frac{EI}{L}(2\theta_B - 2\gamma_{BC} + \theta_C - \gamma_{CB}) \\
M_{CB} &= \frac{EI}{2L}(2\theta_{BC} - 2\gamma_{BC} + 4\theta_{CB} - 4\gamma_{CB}) = \frac{EI}{L}(\theta_B - \gamma_{BC} + 2\theta_C - 2\gamma_{CB}) \\
M_{CD} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{CD} + 2\theta_{DC}) = 4\frac{EI}{L}\theta_C \\
M_{DC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{CD} + 4\theta_{DC}) = 2\frac{EI}{L}\theta_C \\
M_{CE} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{CE} + 2\theta_{EC}) = 4\frac{EI}{L}\theta_C \\
M_{EC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{CE} + 4\theta_{EC}) = 2\frac{EI}{L}\theta_C
\end{aligned} \tag{9.14}$$

ここで、支点 A, D, E は固定支点、および節点 B, C は剛接合であることによって、以下の関係式がある。

$$\begin{aligned}
\theta_{AB} &= \theta_{DC} = \theta_{EC} = 0, \\
\theta_{BA} &= \theta_{BC} = \theta_B, \\
\theta_{CB} &= \theta_{CD} = \theta_{CE} = \theta_C
\end{aligned} \tag{9.15}$$

さらに、固定端の曲げモーメントは、部材の反対側の端部曲げモーメントの半分となることも分かる。

支点以外の節点 B, C のまわりを仮想的に切断して取り出すと、図9.8に示すような曲げモーメントの分布となる。ここで、同じ切断面の両側には、断面力（ここでは曲げモーメントのみ）の大きさは同じ、方向が反対ということが利用されている。節点 B, C においては、下記のモーメントの釣合い方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
M_{B \text{ 点まわり}} &= -M_{BA} - M_{BC} = -4\frac{EI}{L}\theta_B - \frac{EI}{L}(2\theta_B - 2\gamma_{BC} + \theta_C - \gamma_{CB}) = 0 \\
M_{C \text{ 点まわり}} &= -M_{CB} - M_{CD} - M_{CE} = -\frac{EI}{L}(\theta_B - \gamma_{BC} + 2\theta_C - 2\gamma_{CB}) - 4\frac{EI}{L}\theta_C - 4\frac{EI}{L}\theta_C = 0
\end{aligned} \tag{9.16}$$

上記の式を整理すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
6\theta_B + \theta_C &= 2\gamma_{BC} + \gamma_{CB} \\
\theta_B + 10\theta_C &= \gamma_{BC} + 2\gamma_{CB}
\end{aligned} \tag{9.17}$$

上記の θ_B, θ_C に関する連立方程式の解は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\theta_B &= \frac{19\gamma_{BC} + 8\gamma_{CB}}{59} = \frac{11PL^2}{236EI} \\
\theta_C &= \frac{4\gamma_{BC} + 11\gamma_{CB}}{59} = -\frac{7PL^2}{236EI}
\end{aligned} \tag{9.18}$$

式 (9.14) に代入すると、各部材両端部の曲げモーメントは以下となる。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{11}{118}PL, \quad M_{BA} = \frac{22}{118}PL, \quad M_{BC} = -\frac{22}{118}PL, \quad M_{CB} = \frac{28}{118}PL \\
M_{CD} &= -\frac{14}{118}PL, \quad M_{DC} = -\frac{7}{118}PL, \quad M_{CE} = -\frac{14}{118}PL, \quad M_{EC} = -\frac{7}{118}PL
\end{aligned} \tag{9.19}$$

したがって、曲げモーメントの分布図は、図9.9に示す。ここで、 F 点の曲げモーメントは、両端部の中間値 ($\frac{25}{118}PL$) から、中間荷重による曲げモーメント ($PL/2$) を引いたもの ($-\frac{34}{118}PL$) である。

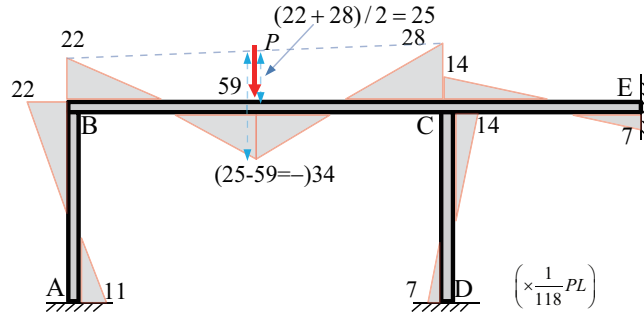


図 9.9 曲げモーメント分布図

9.3 節点移動あり

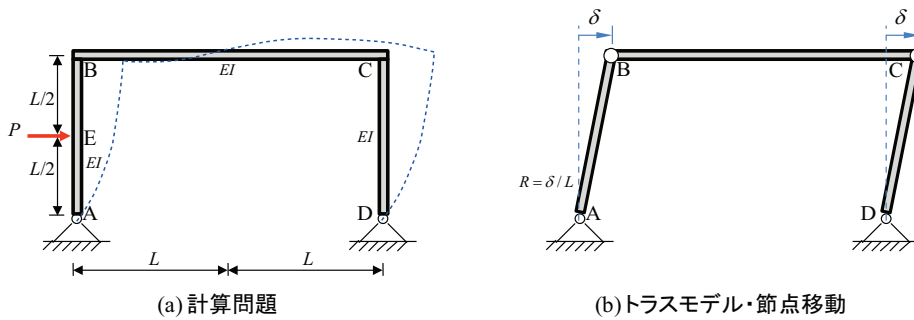


図 9.10 例題：節点移動ありの不静定ラーメン構造

この節では、図9.10(a)に示す節点移動ありの不静定ラーメン構造を考える。

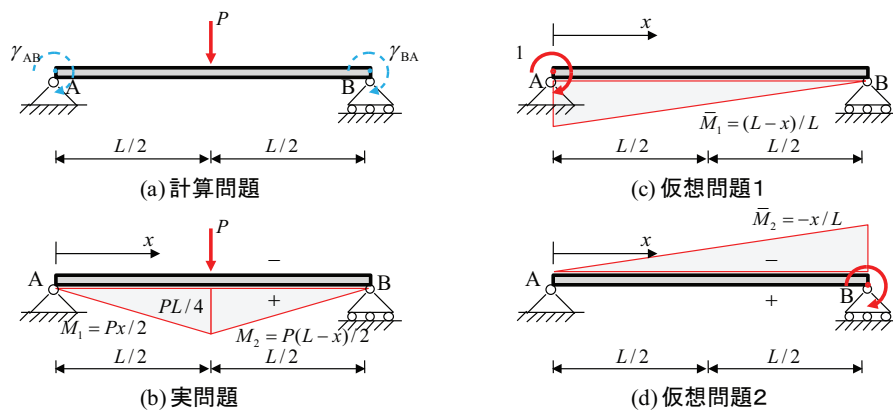


図 9.11 部材 AB の中間荷重による両端部の回転角

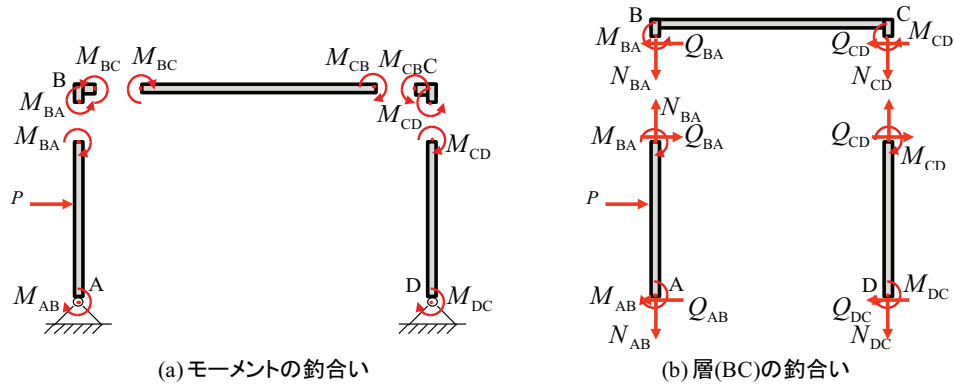


図 9.12 各節点における釣合い関係

例 9.3. 図9.10(a) に示すラーメン構造に対して

- (a) その静定性を判断し、不静定の場合にその不静定次数を求めてください。
 (b) たわみ角法を用いて、その曲げモーメント分布を求めてください。ただし、すべての部材の曲げ剛性を EI とする。

解答：

(a) 不静定次数：

図9.10(a) のラーメン構造の二つの剛接合をピン接合に変換することによって、図9.10(b) のトラスモデルが得られる。このトラスモデルには、節点数は $n=4$ 、部材数は $m=3$ 、反力の数は $p=4$ 、変換された剛接合の数は $q=2$ であるため、Maxwell's ルールを適用すると

$$m - d \times n + p + q = 3 - 2 \times 4 + 4 + 2 = 1 \quad (9.20)$$

となるため、このラーメン構造はこのラーメン構造は 1 次不静定である。

また、このラーメン構造に節点移動の有無を判定するために、以下のようにトラスモデルを Maxwell's ルールに適用する。

$$m - d \times n + p = 3 - 2 \times 4 + 4 = -1 \quad (9.21)$$

その結果が -1 となるため、このトラスモデルが 1 次不安定となる。更に、それに対応している元のラーメン構造には、一つの節点移動が存在する。

(b) 曲げモーメント：

前章の不静定構造の解法でも解いたが、ここではたわみ角法を適用してみる。

構造物に節点移動の有無は、それに対応するトラスモデルの動きによっても判断できる。例えば、図9.10(b) によると、この構造物の部材 AB と CD には、節点移動による回転角 $R = (\arcsin \delta/L \approx) \delta/L$ が生じ、部材 BC には変形前後も水平なので、節点移動による回転角が生じない。

また、部材 AB には中間荷重によるたわみ角 γ_{AB}, γ_{BA} も生じる。したがって、たわみ角法の基本式によって、各部材の材端曲げモーメントとたわみ角の間には以下の関係式が書ける。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} - 4\gamma_{AB} + 2\theta_{BA} - 2\gamma_{BA} - 6R) = \frac{EI}{L}(4\theta_A - 4\gamma_{AB} + 2\theta_B - 2\gamma_{BA} - 6R) \\
M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} - 2\gamma_{AB} + 4\theta_{BA} - 4\gamma_{BA} - 6R) = \frac{EI}{L}(2\theta_A - 2\gamma_{AB} + 4\theta_B - 4\gamma_{BA} - 6R) \\
M_{BC} &= \frac{EI}{2L}(4\theta_{BC} + 2\theta_{CB}) = \frac{EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) \\
M_{CB} &= \frac{EI}{2L}(2\theta_{BC} + 4\theta_{CB}) = \frac{EI}{L}(\theta_B + 2\theta_C) \\
M_{CD} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{CD} + 2\theta_{DC} - 6R) = \frac{EI}{L}(4\theta_C + 2\theta_D - 6R) \\
M_{DC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{CD} + 4\theta_{DC} - 6R) = \frac{EI}{L}(2\theta_C + 4\theta_D - 6R)
\end{aligned} \tag{9.22}$$

ここで、節点 B, C が剛接合によって、たわみ角の以下の関係式が利用された。

$$\begin{aligned}
\theta_{BA} &= \theta_{BC} = \theta_B, \\
\theta_{CB} &= \theta_{CD} = \theta_C
\end{aligned} \tag{9.23}$$

部材 AB の中間荷重による両端部の回転角 γ_{AB}, γ_{BA} を求めるには、部材を単純梁として考え、図9.11に示すように単位荷重法を使う。

$$\begin{aligned}
\gamma_{AB} &= \int_0^{L/2} \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2 \bar{M}_1}{EI} dx \\
&= \int_0^{L/2} \frac{(Px/2)[(L-x)/L]}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{[P(L-x)/2][(L-x)/L]}{EI} dx \\
&= \frac{PL^2}{16EI} \\
\gamma_{BA} &= \int_0^{L/2} \frac{M_1 \bar{M}_2}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx \\
&= \int_0^{L/2} \frac{(Px/2)(-x/L)}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{[P(L-x)/2](-x/L)}{EI} dx \\
&= -\frac{PL^2}{16EI}
\end{aligned} \tag{9.24}$$

未知数は $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, R$ という五つがあるので、方程式も五つが必要となる。軸力とせん断力による材端モーメントがゼロだから省略されたが、図9.12(a)には、各支点・接合部の曲げモーメントの釣合い関係を表し、その釣合い方程式は以下の四つがある。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\theta_A - 4\gamma_{AB} + 2\theta_B - 2\gamma_{BA} - 6R) = 0 \\
&\Rightarrow 2\theta_A + \theta_B - 2\gamma_{AB} - \gamma_{BA} - 3R = 0 \\
-M_{BA} - M_{BC} &= -\frac{EI}{L}(2\theta_A - 2\gamma_{AB} + 4\theta_B - 4\gamma_{BA} - 6R) - \frac{EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) = 0 \\
&\Rightarrow 2\theta_A + 6\theta_B + \theta_C - 6R - 2\gamma_{AB} - 4\gamma_{BA} = 0 \\
-M_{CB} - M_{CD} &= -\frac{EI}{L}(\theta_B + 2\theta_C) - \frac{EI}{L}(4\theta_C + 2\theta_D - 6R) = 0 \\
&\Rightarrow \theta_B + 6\theta_C + 2\theta_D - 6R = 0 \\
M_{DC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_C + 4\theta_D - 6R) = 0 \\
&\Rightarrow \theta_C + 2\theta_D - 3R = 0
\end{aligned} \tag{9.25}$$

未知数が五つなので、後一つの方程式が必要となり、それは図9.12(b)に示す部材 BC に働いている（水平方向の）せん断力の釣合い方程式である。

9.3.1 節点荷重

節点荷重は、ある部材の間に作用することではなく、部材の端部（節点）にかかるものである。節点荷重がかかった場合に、中間荷重のようにそれによるたわみ角 γ_{AB}, γ_{BA} を求める必要がない。言い換えれば、節点荷重によるたわみ角はゼロとなる。

9.4 マトリックス法

ここまでの反力および断面力を求める問題は、基本的には未知数の数に合わせて同じ数の（釣合い）方程式を立て、連立方程式を解くことによって未知数を求めるというプロセスとなる。

実際に、連立方程式を解くには、1回生で習っていた線形代数という強力な数学ツールがある。それは、連立方程式を行列の形式でまとめ、

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \quad (9.31)$$

さらに \mathbf{K} の逆行列 \mathbf{K}^{-1} を使えば、未知数ベクトル \mathbf{d} は一意に求められる。

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \quad (9.32)$$

ここで、 \mathbf{K} は部材の剛性を成分を持った剛性行列、 \mathbf{d} は節点の変位を成分を持った変位ベクトル、 \mathbf{P} は外力ベクトルである。

変位が分かれば、各部材の剛性を使ってその断面力を求めることができる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{Ad} \quad (9.33)$$

ここで、 \mathbf{F} は各部材両端部の断面力を成分を持ったベクトル、 \mathbf{A} は各部材の剛性を表す行列である。

コンピュータにとっては、行列の計算は非常に効率のよいアルゴリズムが開発されている。従って、実際の構造計算ソフトは、連立方程式を行列の形でまとめて解くのはほとんどである。

例えば、前節の不静定ラーメン構造に対してマトリックス法で解いてみる。

例 9.4. 図9.10(a) に示すラーメン構造に対して、マトリックス法を用いて材端の曲げモーメントを求めてください。

前節の例 9.3 で得られた釣合い方程式を以下のように等式の左側は未知数に関する部分、右側は既知に関する部分で整理する。

$$\begin{aligned} 2\theta_A + \theta_B - 3R &= 2\gamma_{AB} + \gamma_{BA} = \frac{PL^2}{16EI} \\ 2\theta_A + 6\theta_B + \theta_C - 6R &= 2\gamma_{AB} + 4\gamma_{BA} = -\frac{PL^2}{8EI} \\ \theta_B + 6\theta_C + 2\theta_D - 6R &= 0 \\ \theta_C + 2\theta_D - 3R &= 0 \\ \theta_A + 2\theta_B + 2\theta_C + \theta_D - 6R &= \gamma_{AB} + 2\gamma_{BA} = -\frac{5PL^2}{16EI} \end{aligned} \quad (9.34)$$

上の式を行列の形で整理すると、以下ようになる。

$$\mathbf{Kd} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ R \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{16EI} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \quad (9.35)$$

ここでの剛性行列 \mathbf{K} は、曲げ剛性 EI と部材長さ L を右側に移項したため、無次元的なものとなる。

剛性行列 \mathbf{K} の逆行列 \mathbf{K}^{-1} は、すぐに求められる¹。

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 39 & 5 & 11 & 9 & -40 \\ -6 & 14 & 2 & 6 & -16 \\ 6 & 2 & 14 & -6 & -16 \\ 9 & 11 & 5 & 39 & -40 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & -32 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

したがって、未知数の材端たわみ角および節点移動による回転角を表す変位ベクトル \mathbf{d} は以下のように求められる。

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ R \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 39 & 5 & 11 & 9 & -40 \\ -6 & 14 & 2 & 6 & -16 \\ 6 & 2 & 14 & -6 & -16 \\ 9 & 11 & 5 & 39 & -40 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & -32 \end{bmatrix} \times \frac{PL^2}{16EI} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{768EI} \begin{pmatrix} 229 \\ 46 \\ 82 \\ 187 \\ 152 \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

各部材両端部の曲げモーメントとたわみ角の関係式より、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{pmatrix} &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\gamma_{AB} - 2\gamma_{BA} \\ -2\gamma_{AB} - 4\gamma_{BA} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \frac{PL^2}{768EI} \begin{pmatrix} 229 \\ 46 \\ 82 \\ 187 \\ 152 \end{pmatrix} + \frac{PL^2}{8EI} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{PL}{128} \begin{pmatrix} 0 \\ -29 \\ 29 \\ 35 \\ -35 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.38) \end{aligned}$$

9.5 宿題

Exercise 9.1. 図9.14に示すラーメン構造物に対して、

- たわみ角法を使って、曲げモーメントを求めてください。
- $\alpha = 0$ の時の曲げモーメント分布図および変形図を描いてください。
- $\alpha = \infty$ の時の曲げモーメント分布図および変形図を描いてください。

¹ MSエクセルで逆行列などの行列計算は、例えば以下のリンクを参考にしてください。
<http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/maiko/mathBA/ExcelMatrix.pdf>。それ以外にも、行列計算専門の Matlab やそのただのバージョンである Octave などがある。

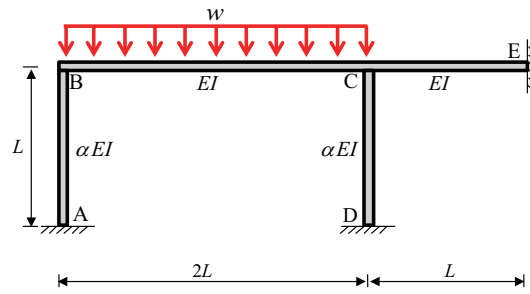


図 9.14 宿題9.1

ただし、部材 BC,CE の曲げ剛性を EI とし、部材 AB, CD の曲げ剛性をその α 倍の αEI とする。

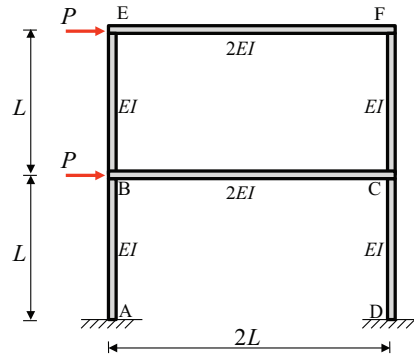


図 9.15 宿題9.2

Exercise 9.2. 図9.15に示す2階建ての不静定ラーメン構造に対して

- (a) その不静定次数を判断してください。
- (b) たわみ角法を使って、曲げモーメント分布図と変形図を描いてください。

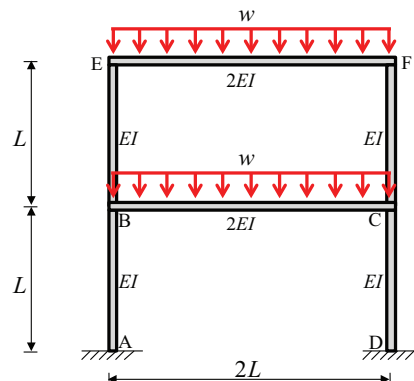


図 9.16 宿題9.3

Exercise 9.3. 図9.16に示す2階建ての不静定ラーメン構造に対して

- (a) たわみ角法を使って、釣合い方程式を立ててください。
- (b) 上記の釣合い方程式を行列でまとめ、マトリックス法で解いてください。

Chapter 10 構造物の非線形挙動

Abstract この章には、座屈および塑性という非線形挙動について勉強する。

10.1 座屈

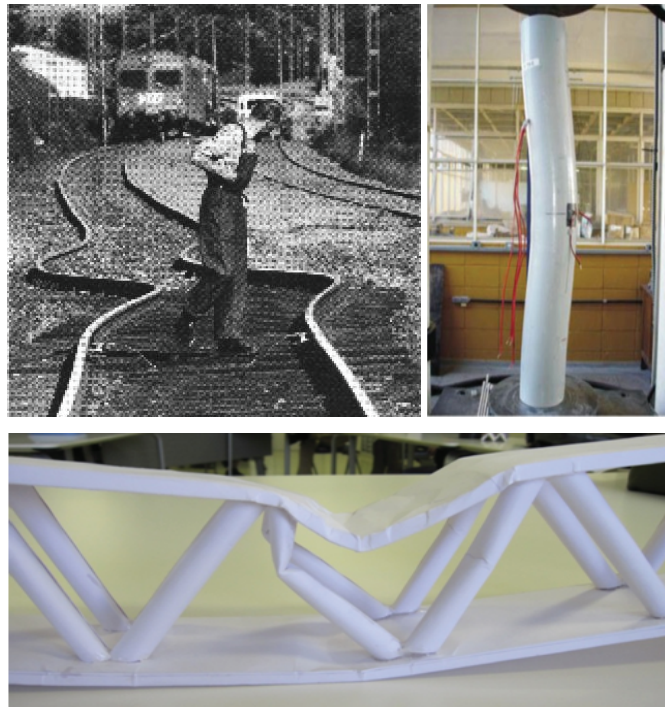


図 10.1 座屈の例。上左：高温により伸びた鉄道レール、上右：柱の圧縮実験、下：トラス紙模型の載荷実験。

柱などの部材が圧縮軸力をうける際に、一般的には軸方向に縮める変形が進む。しかし、細長い柱や薄い板の場合に、材料破壊応力に達するまで顕著な変形が見られないが、軸方向と直交する方向に急に大きな変形が生じる座屈（ざくつ、Buckling）（例えば図10.1）が発生する可能性がある。座屈現象は構造の不安定現象のひとつである。

構造の座屈現象を引き起こす荷重をその構造の座屈荷重という。座屈荷重はその構造の剛性および形状に依存し、材料の強度以下で起こることもある。圧縮荷重を受ける柱の場合、材料、断面形状、荷重の条件が同じであっても、座屈荷重は柱の長さに依存するため、短い柱では座屈を起こさず、長い柱に発生しやすい。

10.1.1 オイラー座屈

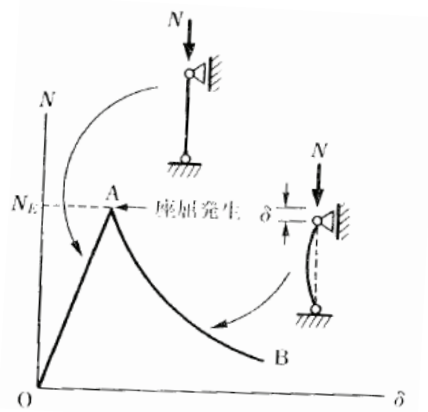


図 10.2 軸圧縮を受ける柱の軸力と変位関係。

まっすぐの棒（柱）の図心軸に圧縮力 N を加える問題を考える。柱の両側はピン支持とローラー支持である。座屈までの軸力 N と軸方向の変位 δ の関係を図10.2の直線の部分に示す。この場合に軸力・変位関係は以下の式で表せる。

$$\delta = L \cdot \varepsilon = L \cdot \frac{\sigma}{E} = \frac{L}{EA} N \quad (10.1)$$

ここで、 E はヤング係数、 A は断面積である。従って、直線部分の傾きは $L/(EA)$ となる。「完璧」にまっすぐな柱（完全系、perfect system）なら、上記の式にしたがって、材料破壊（または次節に出てくる降伏）まで変形していくが、実際の柱は少しだけの施工誤差（不整、imperfection）があっても座屈現象が起こる可能性がある。

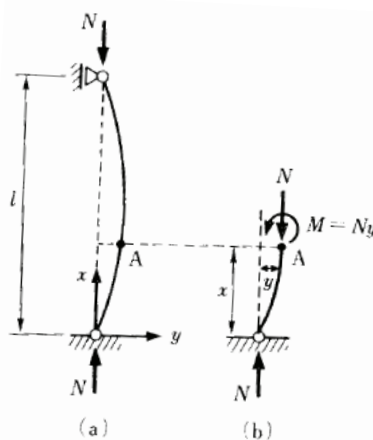


図 10.3 オイラー座屈荷重。

スイスの数学者オイラー (Leonard Euler) は、その座屈荷重 N_E を誘導した。図10.3(a) の柱に適当なところを切断し、図10.3(b) に示すように取り出して、切断面 A 点まわりのモーメント釣合い方程式を立つと、以下の式となる。

$$\sum M_{A \text{ 点まわり}} = M - N \cdot y = 0 \quad (10.2)$$

また、弾性曲線式 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ より、上式を下のたわみ y に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N}{EI}y = 0 \quad (10.3)$$

ここで、 I は断面 2 次モーメントである。

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (10.4)$$

で表したとき、微分方程式は以下のように整理できる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2y = 0 \quad (10.5)$$

この微分方程式の一般解は、次式で表される。

$$y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x \quad (10.6)$$

積分定数 C_1, C_2 は境界条件から定まる。

$$\begin{aligned} y_{x=0} = 0 &\implies C_2 = 0 \\ y_{x=l} = 0 &\implies C_1 \sin \omega l = 0 \implies C_1 = 0 \text{ または } \omega l = m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (10.7)$$

$C_2 = 0$ は決まっているため、 $C_1 = 0$ が成立する時、たわみはいつもゼロとなり、完璧系を意味する。一方、 $\omega l = m\pi$ の時は、 $y = C_1 \sin(m\pi/l)$ となり、柱はサイン曲線の曲がった状態にあることを表している。この時の圧縮力 N は以下ようになる。

$$N = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10.8)$$

圧縮荷重はゼロから少しずつ増えていくため、最初に訪れる解は $m = 1$ のときの荷重 N_E はオイラー荷重と呼ばれる。

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (10.9)$$

座屈応力度 σ_E は座屈荷重 N_E と柱の断面積 A を用いて定義される。

$$\sigma_E = \frac{N_E}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2} = \frac{\pi^2 E}{l^2/i^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (10.10)$$

ここで、 $i (= \sqrt{I/A})$ は断面 2 次半径、 $\lambda (= l/i)$ は細長比 (slenderness ratio) である。 λ は無次元で、 i は長さの次元をもっている。式からでも分かるように、柱は細長いほど、座屈荷重が小さいため、座屈しやすくなる。三年生前期の建築構造計画法 (鉄骨構造) には、また実務設計においてどのぐらいの細長比が許されるかなどについて詳しく解説する。

また、座屈荷重は支持条件の影響を受ける。

有効長さ l_k を用いて、オイラー座屈荷重は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} N_E &= \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}, \\ \sigma_E &= \frac{\pi^2 E}{\lambda_k^2} \end{aligned} \quad (10.11)$$

柱の支持条件によって、その有効長さは図10.4にまとめている。

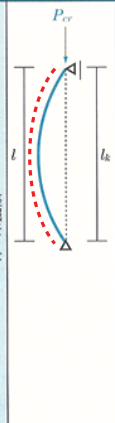
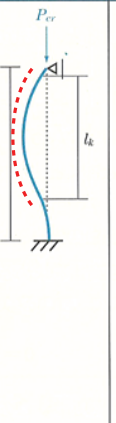
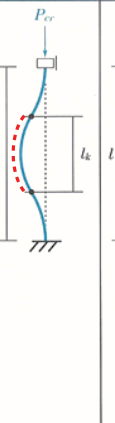
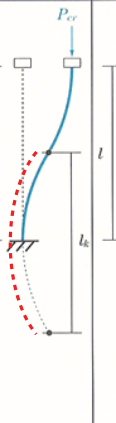
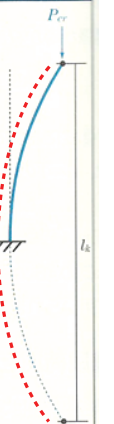
| 拘束条件 | 水平移動拘束 回転両端ピン | 水平移動拘束 回転上端ピン下端固定 | 水平移動拘束 回転両端固定 | 水平移動自由 回転両端固定 | 水平移動自由 回転上端ピン下端固定 |
|--------------|---|---|---|--|---|
| 座面中心から |  |  |  |  |  |
| 有効座屈長さ l_e | l | $0.7l$ | $0.5l$ | l | $2l$ |

図 10.4 支持条件による有効長さ。

10.2 塑性

10.2.1 鋼材の応力-ひずみ関係

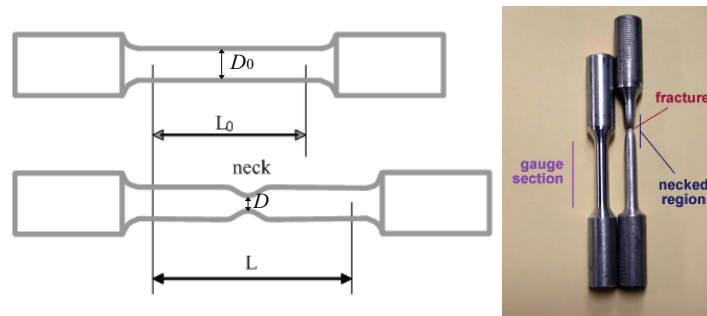


図 10.5 鋼材の引張試験片 (Taken from <http://www.substech.com/>)

鋼材の力学的特性を調べるには、引張試験が簡便であるため、一般的に行われている。断面積 A_0 、評点距離 L_0 、直径 D_0 の試験片を万能試験機に挟み、引張荷重 P を加えると、断面積 A 、評点距離 L 、直径 D に変化したとする。このとき、荷重と評点間の伸びにより、応力 σ (stress) とひずみ ϵ (strain) はそれぞれ

$$\sigma = \frac{P}{A_0}, \quad \epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \tag{10.12}$$

で定義する。

軟鋼の引張試験片を伸びさせると、(公称) 応力とひずみの関係は図 10.6 に示すように得られる。

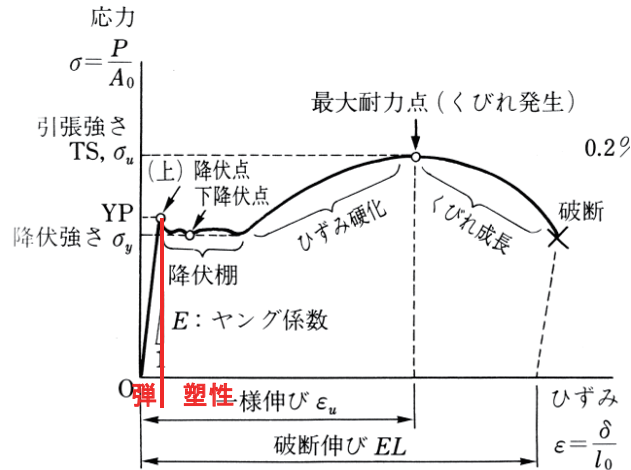


図 10.6 軟鋼の応力-ひずみ関係

- 応力 σ （またはひずみ ε ）が小さいとき、 σ と ε は完全な直線関係を保つ。荷重をゼロに戻すと、試験片も元の状態に戻り、残留変形（ひずみ）が生じない。この状態は弾性といい、この状態を保つ範囲は弾性範囲という。
- ある弾性限界を超えると、荷重がゼロにしても、試験片の変形がある程度戻るが、残留変形（ひずみ）が生じ、元の状態に戻れない。この弾性限界は、降伏強度 σ_y （降伏強さ、Yielding Strength）といい、弾性範囲を超えたものは、塑性範囲という。また、軟鋼の場合に、降伏した後試験片が伸び続けるが、荷重がほぼ変わらない段階がある。これは、降伏棚という。
- さらに伸び続けさせると、試験片が均一に変形なくなり、局部的にくびれ (Necking) が生じ、荷重が下がって破断する。この途中で達した最大の応力 σ_u は、引張強度（引張強さ、Ultimate Strength）という。

弾性範囲における応力・ひずみ関係の勾配は、弾性係数 E （ヤング係数、Young's modulus）と呼ぶ。鋼材の場合、どの鋼種でもほぼ $E = 2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ である。

降伏強度 σ_y と引張強度 σ_u の比を降伏比 Y と呼び、

$$Y = \frac{\sigma_y}{\sigma_u} \quad (10.13)$$

鋼材が降伏してから破断するまでの強度の余力を示す数値である。さらに、建物が降伏してから最大耐力に達するまでの塑性変形能力を決めるパラメーターでもあり、建物の構造上の粘り強さを確保するという点で耐震設計上重要な指標である。また、高張力鋼は強度を上げる目的で作られたものであるが、降伏強度の上昇した割合では引張強度は上昇していない。したがって、強度が大きい鋼材ほど降伏比 Y が 1.0 に近づく傾向を示す。

10.3 構造設計（一次設計）

第 6 章ですでに説明したように、一次設計¹では中小規模の地震に対して、構造物に損傷が生じないことを設計指標とする。鋼材には、塑性化が発生すると残留変形（残留ひずみ）が生じるため、構造物の損傷とみなす。したがって、一次設計の場合、最大の応力度は降伏強さを越えないのは原則である。一方で、構造物が受ける外力荷重としては様々であり、その特性もいろいろ異なっている。

基本的にはいつでもかかっているか（長期荷重）、たまにあるか（短期荷重）に対して、安全率を通じて異なる許容応力度を採用している。

¹ 二次設計の場合には、大規模地震に対して損傷があっても倒壊しないことを設計指標とする。

しかし、以上の議論は座屈しないことは前提条件となる。したがって、以下の条件式がある。

圧縮による最大垂直応力度 σ_c は座屈応力度 σ_E より小さいでなければならない：

$$\sigma_c \leq \sigma_E \quad (10.14)$$

10.3.1 基準強度 F と引張強度 F_u

建築基準法における許容応力度設計においては、一次設計で損傷限界に対して許容応力度設計を行い、二次設計で安全限界に対して保有耐力の計算を行って構造安全性を確認することとなっている。

一次設計の許容応力度設計では、弾性解析によって得られた部材断面力を公称応力度 σ_i (i は、引張、圧縮、曲げ、せん断などの応力度の種類) に換算し、この応力度の種類に対応した許容応力度 f_i 以下であることを確認する。すなわち、

$$\sigma_i \leq f_i \implies \text{OK} \quad (10.15)$$

許容応力度 σ_i は、応力度の種類 i によって部材等が損傷限界となる応力度 $\sigma_{cr,i}$ に対して、安全率 c_i を考慮したものである。

$$f_i = \frac{\sigma_{cr,i}}{c_i} \quad (10.16)$$

ここで、損傷限界に対する $\sigma_{cr,i}$ および c_i は、弾性範囲だけでなく、非弾性挙動も考慮して決められている。そこで、材料の基準強度 F の値は降伏強度 σ_y だけでなく、引張強度 σ_u も考慮する必要がある。具体的には、JIS 規格で規定された降伏強度 σ_y の下限値と引張強度の下限値の 70% のうちの小さい値を F として採用している。

上記の基準強度 F と終局強度 F_u は、表 10.1 に挙げられる。

表 10.1 建築構造用鋼材の F および F_u 値 (N/mm^2)

| 鋼材の種類 | | SN400 | SN490 |
|-------|--------------------|-------|-------|
| F | 厚さ 40mm 以下 | 235 | 325 |
| | 厚さ 40 をこえ 100mm 以下 | 215 | 295 |
| F_u | | 400 | 490 |

10.3.2 許容応力度

建築基準法施行令 90 条に定められている鋼材の許容応力度を、表 10.2 に示す。短期応力に対する許容応力度は長期応力の 1.5 倍であり、せん断の許容応力度は圧縮、引張、曲げの $1/\sqrt{3}$ である。鋼種ごとの F 値は、表 10.1 の値を用いる。

表 10.2 鋼材の短期・長期許容応力度 (N/mm²)

| 長期荷重に対する許容応力度 | | | 短期荷重に対する許容応力度 | | | | | |
|-----------------|----|----|-------------------------|----|----|----------------------|-----|--|
| 圧縮 | 引張 | 曲げ | せん断 | 圧縮 | 引張 | 曲げ | せん断 | |
| $\frac{F}{1.5}$ | | | $\frac{F}{1.5\sqrt{3}}$ | | | F | | |
| | | | | | | $\frac{F}{\sqrt{3}}$ | | |