

Chapter 9 たわみ角法

Abstract 前章で説明した仮想仕事法を用いて不静定次数の高い構造物を解くには、計算がかなり複雑となる。その場合には、本章で紹介するたわみ角法が適用できる。

9.1 基本式

ラーメン構造に対しては、軸力とせん断力による変形が小さいため、変形の計算上は無視できる。(しかし、応力の計算では無視できない場合がある。) さらに、ラーメン構造は線形的な部材(柱、梁)で構成されているので、共通である線形的部材の曲げによる変形を定式化できる。これはたわみ角法の基本的な考え方である。

たわみ角法では、梁端部の曲げモーメントとたわみ角(回転角)の関係を利用し、節点におけるモーメントに関する連立釣合い方程式を解くことによって、たわみ角を求め、さらに曲げモーメントを求めることができる。

梁 AB 両端部の全体のたわみ角(回転角)を θ_{AB} と θ_{BA} で表す。そのうち、曲げモーメントのみによる回転角を α_{AB} と α_{BA} 、中間荷重による回転角を γ_{AB} と γ_{BA} 、節点移動による回転角を R で表す。これらの回転角の間に、下記の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\theta_{AB} &= \alpha_{AB} + \gamma_{AB} + R \\ \theta_{BA} &= \alpha_{BA} + \gamma_{BA} + R\end{aligned}\tag{9.1}$$

9.1.1 梁端曲げモーメントによる回転角 α_{AB} と α_{BA}

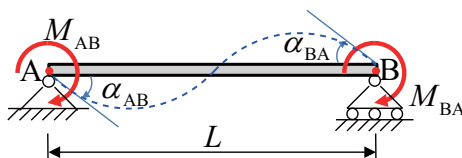


図 9.1 梁端曲げモーメントと回転角

α_{AB} と α_{BA} を求めるため、図9.1に示す単純梁 AB の両端部に曲げモーメント M_{AB} と M_{BA} をかける問題を考える。詳細が省略するが、(弾性曲線式、モールの定理または仮想仕事法のいずれによって) α_{AB} と α_{BA} は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} &= \frac{M_{AB}L}{3EI} - \frac{M_{BA}L}{6EI} \\ \alpha_{BA} &= -\frac{M_{AB}L}{6EI} + \frac{M_{BA}L}{3EI}\end{aligned}\quad (9.2)$$

ここで、曲げモーメントもたわみ角も時計回りを正方向とする。
上記の式を整理すると、以下のようにまとめられる。

節点移動がない場合の梁端曲げモーメント M_{AB}, M_{BA} とたわみ角 θ_{AB}, θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA})\end{aligned}\quad (9.3)$$

ここで、曲げ剛性 EI と長さ L の比 EI/L は部材剛度 (Member Stiffness) と呼ばれる。

式9.3よりも分かるように、同じ剛接合の節点につながっている部材に対して、剛度の高い部材に大きな曲げモーメントは負担される。また、大きい括弧外の式は、たわみ角法の基本式となる。曲げモーメントのみによる回転角を考える場合には、全体たわみ角に一致するので、大きい括弧でもよい。しかし、場合によって、節点移動の有無および中間荷重による回転角も考慮する必要がある。

9.1.2 節点移動と回転角

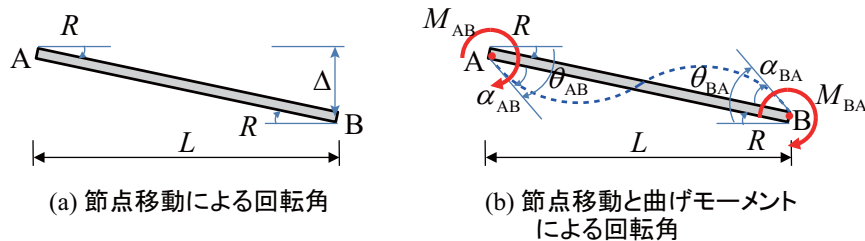


図 9.2 節点移動および曲げモーメントと回転角

曲げモーメントがなくても、梁端部の（材軸と直交する方向の）移動によって、回転角が生じることがある。例えば、図9.2(a)には、節点の移動によって回転角 R が生じる。図9.2(b)のように、両側に曲げモーメントをさらにかけると、曲げモーメントによる回転角 α_{AB}, α_{BA} は、両端部の全体のたわみ角 θ_{AB}, θ_{BA} から節点の移動による回転角 R を引くとなるため、以下の式で表せる。

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} &= \theta_{AB} - R, \\ \alpha_{BA} &= \theta_{BA} - R\end{aligned}\quad (9.4)$$

節点の材軸と直交する方向の移動 Δ によって生じた変位角 R は以下の式で計算できる。

$$R \cdot L = \Delta \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\Delta}{L}\quad (9.5)$$

たわみ角法の基本式 (9.3) に代入すると、材軸と直交する方向に節点移動のある場合の式は以下ようになる。

節点移動がある場合の梁端曲げモーメント M_{AB}, M_{BA} とたわみ角 θ_{AB}, θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} + 2\theta_{BA} - 6R) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} + 4\theta_{BA} - 6R) \end{aligned} \quad (9.6)$$

節点移動の有無およびその数については、変換されたトラスモデルの不安定次数によって判断できる。変換されたトラスモデルが安定の場合、元のラーメン構造には節点移動が存在しない。また、変換されたトラスモデルが n 次不安定の場合には、元のラーメン構造には n 個の節点移動が存在し、実際の計算ではそれを考慮しなければならない。

9.1.3 中間荷重と回転角

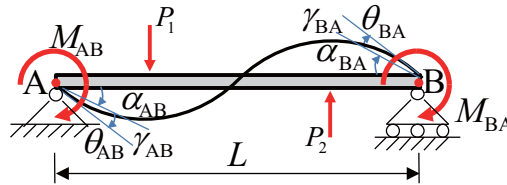


図 9.3 中間荷重による回転角

図9.3に示すように、単純梁の両側にモーメントがかからなくても、梁の中間に荷重（例えば図の中の P_1, P_2 ）を加えると、両端部にも回転角 γ_{AB}, γ_{BA} が生じる。

節点の移動を考慮しない場合に、梁 AB 両端部の曲げモーメントによる回転角 α_{AB}, α_{BA} は、

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} &= \theta_{AB} - \gamma_{AB}, \\ \alpha_{BA} &= \theta_{BA} - \gamma_{BA} \end{aligned} \quad (9.7)$$

となり、たわみ角法の基本式 (9.3) に代入すると、以下のようにまとめられる。

中間荷重がある場合の梁端曲げモーメント M_{AB}, M_{BA} とたわみ角 θ_{AB}, θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} - 4\gamma_{AB} + 2\theta_{BA} - 2\gamma_{BA}) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} - 2\gamma_{AB} + 4\theta_{BA} - 4\gamma_{BA}) \end{aligned} \quad (9.8)$$

ここで、注意されたいのは、中間荷重による回転角 γ_{AB}, γ_{BA} は未知数ではなく、単位荷重法などを使って、中間荷重に対応するものとして計算できる。

9.1.4 回転角と曲げモーメントの一般式

節点の移動と中間荷重を考える場合に、図 9.4に示すように両端部曲げモーメントによる回転角 α_{AB}, α_{BA} は、

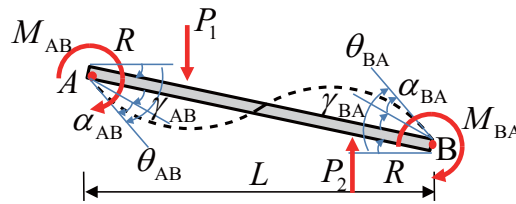


図 9.4 節点移動と中間荷重を考慮した場合の曲げモーメントと回転角

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} &= \theta_{AB} - \gamma_{AB} - R, \\ \alpha_{BA} &= \theta_{BA} - \gamma_{BA} - R\end{aligned}\quad (9.9)$$

となり、たわみ角法の基本式 (9.3) に代入すると、以下のようにまとめられる。

節点移動および中間荷重がある場合の梁端曲げモーメント M_{AB} , M_{BA} とたわみ角 θ_{AB} , θ_{BA} の関係式：

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\alpha_{AB} + 2\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} - 4\gamma_{AB} + 2\theta_{BA} - 2\gamma_{BA} - 6R) \\ M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\alpha_{AB} + 4\alpha_{BA}) = \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} - 2\gamma_{AB} + 4\theta_{BA} - 4\gamma_{BA} - 6R)\end{aligned}\quad (9.10)$$

9.1.5 Remarks

梁端の曲げモーメント M_{AB} , M_{BA} とそれによるたわみ角 α_{AB} , α_{BA} との間に一定の関係式があるが、節点移動による（剛体）回転角 R および中間荷重による回転角 γ_{AB} , γ_{BA} とは無関係である。したがって、 M_{AB} , M_{BA} と α_{AB} , α_{BA} との関係式の中で、全体のたわみ角 θ_{AB} , θ_{BA} から R および γ_{AB} , γ_{BA} を引く必要がある。

たわみ角法による（不静定）構造の計算手順：

1. 各部材に対して、回転角（たわみ角）と両端部曲げモーメントの関係式を書く。
2. 各節点に対して、曲げモーメントの釣り合い方程式を立てる。
3. 連立方程式により未知数である回転角を求める。
4. 回転角により各部材両端部の曲げモーメントを求める。
5. 中間荷重による曲げモーメントを含め、各部材の曲げモーメント分布図を描く。

9.2 節点移動なし

節点移動なしの不静定ラーメン構造の例題としては、図9.5の構造物を考える。

例 9.1. 図9.5に示すラーメン構造の不静定次数を求めてください。

図9.6に示すようなトラスモデルに変換するため、六つの剛接合をピン接合に変えた。すなわち、 $q=6$ 。しかし、C点の二つのピン接合は実質的に一つのピン接合として働いているので、節点の数は $n=5$ 、部材数は $m=4$ 、反力の数は $p=6$ である。Maxwell's ルールを適用すると、

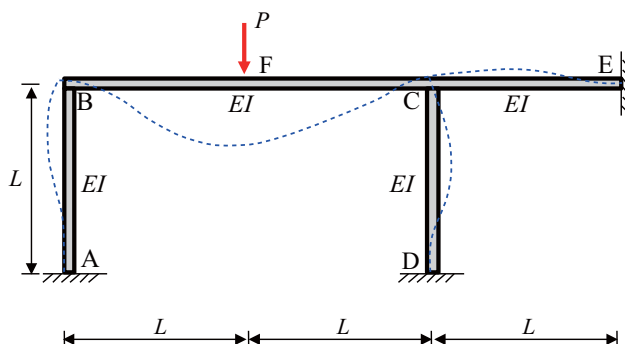


図 9.5 節点移動なしの不静定ラーメン構造

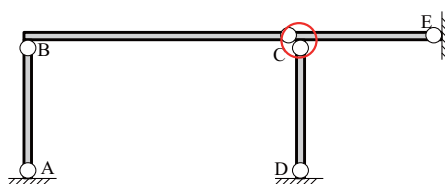


図 9.6 図 9.5の不静定次数を計算するためのトラスモデル。

$$m - d \times n + p + q = 4 - 2 \times 5 + 6 + 6 = 6 \tag{9.11}$$

となるため、このラーメン構造はこのラーメン構造は6次不静定である。

前章の方法によっては、六つの変位適合条件を立てないとできないため、解きにくい問題である。しかし、以下の例題で示すように、たわみ角法を適用した場合に、比較的解くことができる。さらに、たわみ角法を適用する場合、(ラーメン)構造物の不静定次数に関係ない。

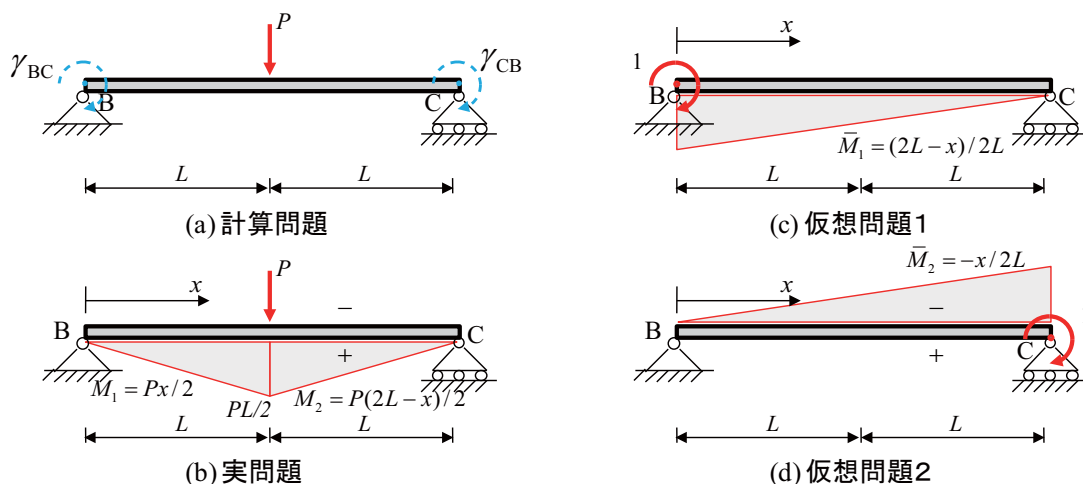


図 9.7 BC 間の中間荷重による回転角

例 9.2. 図9.5に示すラーメン構造の曲げモーメント分布を求めてください。ただし、すべての部材の曲げ剛性を EI とする。

図 9.6に示す変換されたトラスモデルに対して、節点の数は $n=5$ 、部材数は $m=4$ 、反力の数は $p=6$ である。Maxwell's ルールを適用して、その不安定次数は以下のように求められる。

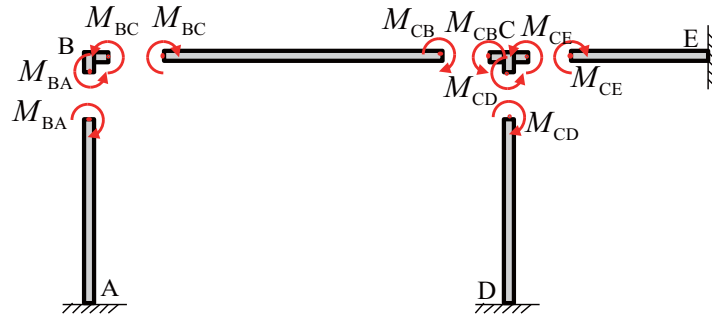


図 9.8 節点における曲げモーメント

$$m - d \times n + p = 4 - 2 \times 5 + 6 = 0 \quad (9.12)$$

このトラスモデルは安定であり（不安定次数がゼロ）、それに対応している元のラーメン構造には節点移動が存在しない。ここで注意されたいのは、変換されたトラスモデルの安定性を調べているので、ラーメン構造をトラスモデルに変換される際に解放された自由度数はカウントされない。

節点移動なしというのは、各部材の材軸と直交する方向への移動が（支点によって）拘束されている。図 9.6 に示すようなトラスモデルによると、各部材の材軸と直交する方向への移動ができないため、節点移動なしの問題となる。

部材 BC の間に中間荷重 P が作用しているため、中間荷重による両端部の回転角 γ_{BC}, γ_{CB} を求める必要がある。そのため、図 9.7 の計算モデルを考える。単位荷重法によって、中間荷重による回転角は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \gamma_{BC} &= \int_0^L \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{M_2 \bar{M}_1}{EI} dx \\ &= \int_0^L \frac{(Px/2)[(2L-x)/2L]}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{[P(2L-x)/2][(2L-x)/2L]}{EI} dx \\ &= \frac{PL^2}{4EI} \\ \gamma_{CB} &= \int_0^L \frac{M_1 \bar{M}_2}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx \\ &= \int_0^L \frac{(Px/2)(-x/2L)}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{[P(2L-x)/2](-x/2L)}{EI} dx \\ &= -\frac{PL^2}{4EI} \end{aligned} \quad (9.13)$$

たわみ角法の基本式を適用し、各部材両端部の曲げモーメントと回転角は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} + 2\theta_{BA}) = 2\frac{EI}{L}\theta_B \\
M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} + 4\theta_{BA}) = 4\frac{EI}{L}\theta_B \\
M_{BC} &= \frac{EI}{2L}(4\theta_{BC} - 4\gamma_{BC} + 2\theta_{CB} - 2\gamma_{CB}) = \frac{EI}{L}(2\theta_B - 2\gamma_{BC} + \theta_C - \gamma_{CB}) \\
M_{CB} &= \frac{EI}{2L}(2\theta_{BC} - 2\gamma_{BC} + 4\theta_{CB} - 4\gamma_{CB}) = \frac{EI}{L}(\theta_B - \gamma_{BC} + 2\theta_C - 2\gamma_{CB}) \\
M_{CD} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{CD} + 2\theta_{DC}) = 4\frac{EI}{L}\theta_C \\
M_{DC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{CD} + 4\theta_{DC}) = 2\frac{EI}{L}\theta_C \\
M_{CE} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{CE} + 2\theta_{EC}) = 4\frac{EI}{L}\theta_C \\
M_{EC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{CE} + 4\theta_{EC}) = 2\frac{EI}{L}\theta_C
\end{aligned} \tag{9.14}$$

ここで、支点 A, D, E は固定支点、および節点 B, C は剛接合であることによって、以下の関係式がある。

$$\begin{aligned}
\theta_{AB} &= \theta_{DC} = \theta_{EC} = 0, \\
\theta_{BA} &= \theta_{BC} = \theta_B, \\
\theta_{CB} &= \theta_{CD} = \theta_{CE} = \theta_C
\end{aligned} \tag{9.15}$$

さらに、固定端の曲げモーメントは、部材の反対側の端部曲げモーメントの半分となることも分かる。

支点以外の節点 B, C のまわりを仮想的に切断して取り出すと、図9.8に示すような曲げモーメントの分布となる。ここで、同じ切断面の両側には、断面力（ここでは曲げモーメントのみ）の大きさは同じ、方向が反対ということが利用されている。節点 B, C においては、下記のモーメントの釣合い方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
M_{B \text{ 点まわり}} &= -M_{BA} - M_{BC} = -4\frac{EI}{L}\theta_B - \frac{EI}{L}(2\theta_B - 2\gamma_{BC} + \theta_C - \gamma_{CB}) = 0 \\
M_{C \text{ 点まわり}} &= -M_{CB} - M_{CD} - M_{CE} = -\frac{EI}{L}(\theta_B - \gamma_{BC} + 2\theta_C - 2\gamma_{CB}) - 4\frac{EI}{L}\theta_C - 4\frac{EI}{L}\theta_C = 0
\end{aligned} \tag{9.16}$$

上記の式を整理すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
6\theta_B + \theta_C &= 2\gamma_{BC} + \gamma_{CB} \\
\theta_B + 10\theta_C &= \gamma_{BC} + 2\gamma_{CB}
\end{aligned} \tag{9.17}$$

上記の θ_B, θ_C に関する連立方程式の解は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\theta_B &= \frac{19\gamma_{BC} + 8\gamma_{CB}}{59} = \frac{11PL^2}{236EI} \\
\theta_C &= \frac{4\gamma_{BC} + 11\gamma_{CB}}{59} = -\frac{7PL^2}{236EI}
\end{aligned} \tag{9.18}$$

式(9.14)に代入すると、各部材両端部の曲げモーメントは以下となる。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{11}{118}PL, \quad M_{BA} = \frac{22}{118}PL, \quad M_{BC} = -\frac{22}{118}PL, \quad M_{CB} = \frac{28}{118}PL \\
M_{CD} &= -\frac{14}{118}PL, \quad M_{DC} = -\frac{7}{118}PL, \quad M_{CE} = -\frac{14}{118}PL, \quad M_{EC} = -\frac{7}{118}PL
\end{aligned} \tag{9.19}$$

したがって、曲げモーメントの分布図は、図9.9に示す。ここで、 F 点の曲げモーメントは、両端部の中間値 ($\frac{25}{118}PL$) から、中間荷重による曲げモーメント ($PL/2$) を引いたもの ($-\frac{34}{118}PL$) である。

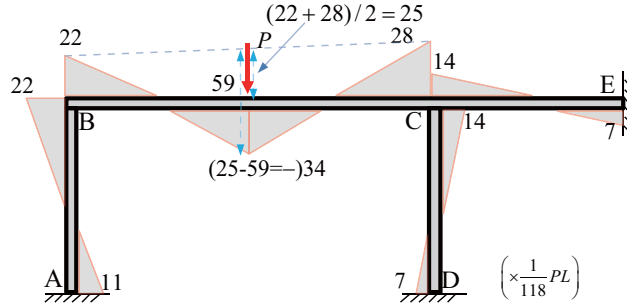


図 9.9 曲げモーメント分布図

9.3 節点移動あり

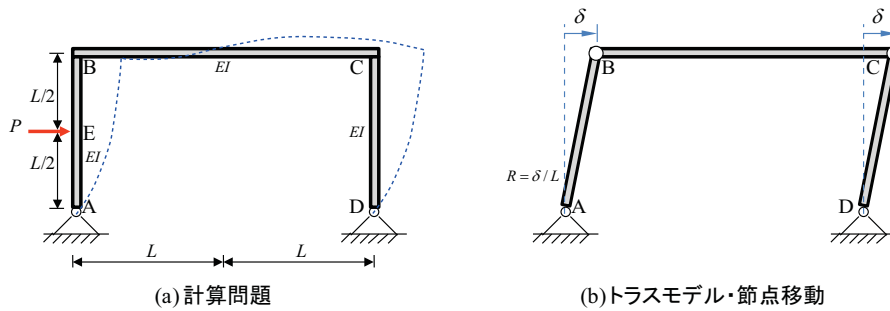


図 9.10 例題：節点移動ありの不静定ラーメン構造

この節では、図9.10(a)に示す節点移動ありの不静定ラーメン構造を考える。

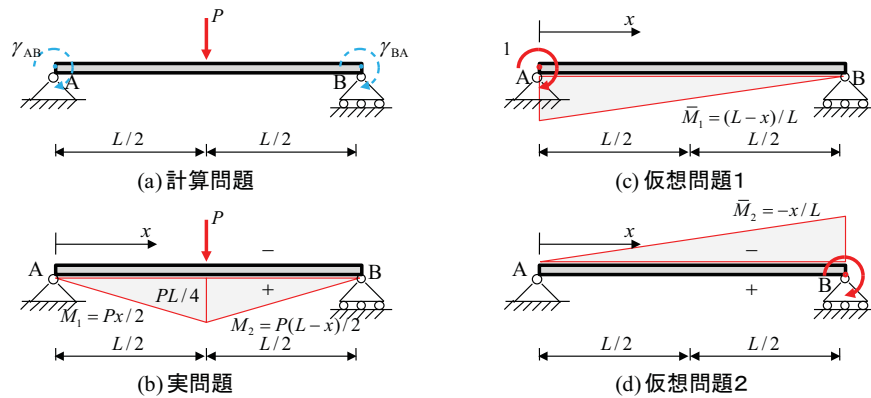


図 9.11 部材 AB の中間荷重による両端部の回転角

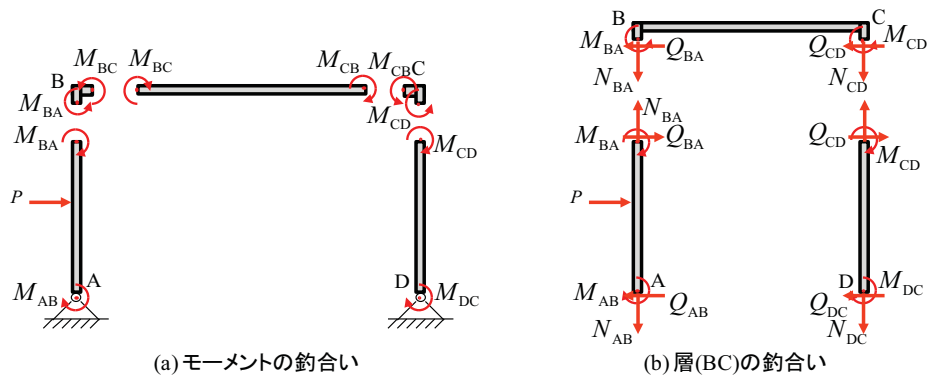


図 9.12 各節点における釣合い関係

例 9.3. 図9.10(a) に示すラーメン構造に対して

- (a) その静定性を判断し、不静定の場合にその不静定次数を求めてください。
 (b) たわみ角法を用いて、その曲げモーメント分布を求めてください。ただし、すべての部材の曲げ剛性を EI とする。

解答：

(a) 不静定次数：

図9.10(a) のラーメン構造の二つの剛接合をピン接合に変換することによって、図9.10(b) のトラスモデルが得られる。このトラスモデルには、節点数は $n=4$ 、部材数は $m=3$ 、反力の数は $p=4$ 、変換された剛接合の数は $q=2$ であるため、Maxwell's ルールを適用すると

$$m - d \times n + p + q = 3 - 2 \times 4 + 4 + 2 = 1 \quad (9.20)$$

となるため、このラーメン構造はこのラーメン構造は 1 次不静定である。

また、このラーメン構造に節点移動の有無を判定するために、以下のようにトラスモデルを Maxwell's ルールに適用する。

$$m - d \times n + p = 3 - 2 \times 4 + 4 = -1 \quad (9.21)$$

その結果が -1 となるため、このトラスモデルが 1 次不安定となる。更に、それに対応している元のラーメン構造には、一つの節点移動が存在する。

(b) 曲げモーメント：

前章の不静定構造の解法でも解いたが、ここではたわみ角法を適用してみる。

構造物に節点移動の有無は、それに対応するトラスモデルの動きによっても判断できる。例えば、図9.10(b) によると、この構造物の部材 AB と CD には、節点移動による回転角 $R = (\arcsin \delta/L \approx) \delta/L$ が生じ、部材 BC には変形前後も水平なので、節点移動による回転角が生じない。

また、部材 AB には中間荷重によるたわみ角 γ_{AB}, γ_{BA} も生じる。したがって、たわみ角法の基本式によって、各部材の材端曲げモーメントとたわみ角の間には以下の関係式が書ける。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{AB} - 4\gamma_{AB} + 2\theta_{BA} - 2\gamma_{BA} - 6R) = \frac{EI}{L}(4\theta_A - 4\gamma_{AB} + 2\theta_B - 2\gamma_{BA} - 6R) \\
M_{BA} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{AB} - 2\gamma_{AB} + 4\theta_{BA} - 4\gamma_{BA} - 6R) = \frac{EI}{L}(2\theta_A - 2\gamma_{AB} + 4\theta_B - 4\gamma_{BA} - 6R) \\
M_{BC} &= \frac{EI}{2L}(4\theta_{BC} + 2\theta_{CB}) = \frac{EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) \\
M_{CB} &= \frac{EI}{2L}(2\theta_{BC} + 4\theta_{CB}) = \frac{EI}{L}(\theta_B + 2\theta_C) \\
M_{CD} &= \frac{EI}{L}(4\theta_{CD} + 2\theta_{DC} - 6R) = \frac{EI}{L}(4\theta_C + 2\theta_D - 6R) \\
M_{DC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_{CD} + 4\theta_{DC} - 6R) = \frac{EI}{L}(2\theta_C + 4\theta_D - 6R)
\end{aligned} \tag{9.22}$$

ここで、節点 B,C が剛接合によって、たわみ角の以下の関係式が利用された。

$$\begin{aligned}
\theta_{BA} &= \theta_{BC} = \theta_B, \\
\theta_{CB} &= \theta_{CD} = \theta_C
\end{aligned} \tag{9.23}$$

部材 AB の中間荷重による両端部の回転角 γ_{AB}, γ_{BA} を求めるには、部材を単純梁として考え、図9.11に示すように単位荷重法を使う。

$$\begin{aligned}
\gamma_{AB} &= \int_0^{L/2} \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2 \bar{M}_1}{EI} dx \\
&= \int_0^{L/2} \frac{(Px/2)[(L-x)/L]}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{[P(L-x)/2][(L-x)/L]}{EI} dx \\
&= \frac{PL^2}{16EI} \\
\gamma_{BA} &= \int_0^{L/2} \frac{M_1 \bar{M}_2}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI} dx \\
&= \int_0^{L/2} \frac{(Px/2)(-x/L)}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{[P(L-x)/2](-x/L)}{EI} dx \\
&= -\frac{PL^2}{16EI}
\end{aligned} \tag{9.24}$$

未知数は $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, R$ という五つがあるので、方程式も五つが必要となる。軸力とせん断力による材端モーメントがゼロだから省略されたが、図9.12(a)には、各支点・接合部の曲げモーメントの釣合い関係を表し、その釣合い方程式は以下の四つがある。

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{EI}{L}(4\theta_A - 4\gamma_{AB} + 2\theta_B - 2\gamma_{BA} - 6R) = 0 \\
\Rightarrow 2\theta_A + \theta_B - 2\gamma_{AB} - \gamma_{BA} - 3R &= 0 \\
-M_{BA} - M_{BC} &= -\frac{EI}{L}(2\theta_A - 2\gamma_{AB} + 4\theta_B - 4\gamma_{BA} - 6R) - \frac{EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) = 0 \\
\Rightarrow 2\theta_A + 6\theta_B + \theta_C - 6R - 2\gamma_{AB} - 4\gamma_{BA} &= 0 \\
-M_{CB} - M_{CD} &= -\frac{EI}{L}(\theta_B + 2\theta_C) - \frac{EI}{L}(4\theta_C + 2\theta_D - 6R) = 0 \\
\Rightarrow \theta_B + 6\theta_C + 2\theta_D - 6R &= 0 \\
M_{DC} &= \frac{EI}{L}(2\theta_C + 4\theta_D - 6R) = 0 \\
\Rightarrow \theta_C + 2\theta_D - 3R &= 0
\end{aligned} \tag{9.25}$$

未知数が五つなので、後一つの方程式が必要となり、それは図9.12(b)に示す部材 BC に働いている（水平方向の）せん断力の釣合い方程式である。

$$\sum X = -Q_{BA} - Q_{CD} = 0 \quad (9.26)$$

これは、層方程式と呼ばれる。ここで、 Q_{BA}, Q_{CD} を求めるために、それぞれ部材 AB, CD に対して、A 点と D 点回りのモーメントの釣合い方程式を考える。

$$\begin{aligned} \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= M_{AB} + M_{BA} + Q_{BA} \cdot L + PL/2 = 0 \\ \Rightarrow Q_{BA} &= -\frac{M_{AB} + M_{BA} + PL/2}{L} = -\frac{M_{BA}}{L} - P/2 \\ &= -\frac{EI}{L^2}(2\theta_A - 2\gamma_{AB} + 4\theta_B - 4\gamma_{BA} - 6R) - P/2 \\ \sum M_{D \text{ 点まわり}} &= M_{CD} + M_{DC} + Q_{CD} \cdot L = 0 \\ \Rightarrow Q_{CD} &= -\frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} = -\frac{M_{CD}}{L} \\ &= -\frac{EI}{L^2}(4\theta_C + 2\theta_D - 6R) \end{aligned} \quad (9.27)$$

層方程式に代入し、整理すると、以下の未知数に関する方程式が得られる。

$$\theta_A + 2\theta_B + 2\theta_C + \theta_D - \gamma_{AB} - 2\gamma_{BA} - 6R + \frac{PL^2}{4EI} = 0 \quad (9.28)$$

それで、すべての五つの方程式が揃っている。(複雑だが、) 五つの未知数に関する連立方程式を解くと、その値はそれぞれ以下ようになる。

$$\theta_A = \frac{229PL^2}{768EI}, \quad \theta_B = \frac{23PL^2}{384EI}, \quad \theta_C = \frac{41PL^2}{384EI}, \quad \theta_D = \frac{187PL^2}{768EI}, \quad R = \frac{19PL^2}{96EI} \quad (9.29)$$

従って、材端曲げモーメントはたわみ角法の基本式によつては以下ようになる。

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 0, & M_{BA} &= -\frac{29}{128}PL, & M_{BC} &= \frac{29}{128}PL, \\ M_{CB} &= \frac{35}{128}PL, & M_{CD} &= -\frac{35}{128}PL, & M_{DC} &= 0 \end{aligned} \quad (9.30)$$

この結果は、前章で仮想仕事法による結果と一致する。その曲げモーメントの分布図は図9.13に示す。ここで、部材 AB の曲げモーメントの分布は、両端部の曲げモーメントを直線で結んだものと、AB を単純梁として考慮した場合中間荷重による曲げモーメントの組み合わせとなる。

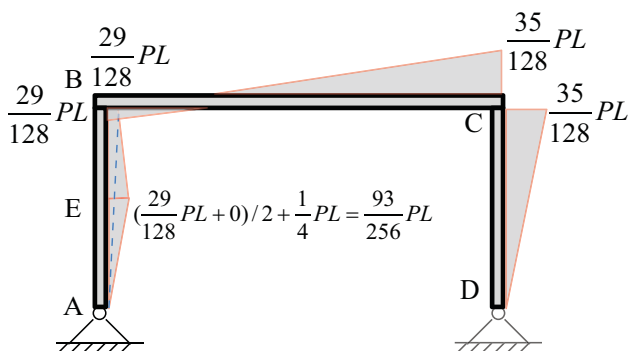


図 9.13 曲げモーメント分布図

9.3.1 節点荷重

節点荷重は、ある部材の間に作用することではなく、部材の端部（節点）にかかるものである。節点荷重がかかった場合に、中間荷重のようにそれによるたわみ角 γ_{AB}, γ_{BA} を求める必要がない。言い換えれば、節点荷重によるたわみ角はゼロとなる。

9.4 マトリックス法

ここまでの反力および断面力を求める問題は、基本的には未知数の数に合わせて同じ数の（釣合い）方程式を立て、連立方程式を解くことによって未知数を求めるというプロセスとなる。

実際に、連立方程式を解くには、1回生で習っていた線形代数という強力な数学ツールがある。それは、連立方程式を行列の形式でまとめ、

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \quad (9.31)$$

さらに \mathbf{K} の逆行列 \mathbf{K}^{-1} を使えば、未知数ベクトル \mathbf{d} は一意に求められる。

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \quad (9.32)$$

ここで、 \mathbf{K} は部材の剛性を成分を持った剛性行列、 \mathbf{d} は節点の変位を成分を持った変位ベクトル、 \mathbf{P} は外力ベクトルである。

変位が分かれば、各部材の剛性を使ってその断面力を求めることができる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{Ad} \quad (9.33)$$

ここで、 \mathbf{F} は各部材両端部の断面力を成分を持ったベクトル、 \mathbf{A} は各部材の剛性を表す行列である。

コンピュータにとっては、行列の計算は非常に効率のよいアルゴリズムが開発されている。従って、実際の構造計算ソフトは、連立方程式を行列の形でまとめて解くのはほとんどである。

例えば、前節の不静定ラーメン構造に対してマトリックス法で解いてみる。

例 9.4. 図9.10(a) に示すラーメン構造に対して、マトリックス法を用いて材端の曲げモーメントを求めてください。

前節の例 9.3 で得られた釣合い方程式を以下のように等式の左側は未知数に関する部分、右側は既知に関する部分で整理する。

$$\begin{aligned} 2\theta_A + \theta_B - 3R &= 2\gamma_{AB} + \gamma_{BA} = \frac{PL^2}{16EI} \\ 2\theta_A + 6\theta_B + \theta_C - 6R &= 2\gamma_{AB} + 4\gamma_{BA} = -\frac{PL^2}{8EI} \\ \theta_B + 6\theta_C + 2\theta_D - 6R &= 0 \\ \theta_C + 2\theta_D - 3R &= 0 \\ \theta_A + 2\theta_B + 2\theta_C + \theta_D - 6R &= \gamma_{AB} + 2\gamma_{BA} = \frac{PL^2}{4EI} = -\frac{5PL^2}{16EI} \end{aligned} \quad (9.34)$$

上の式を行列の形で整理すると、以下ようになる。

$$\mathbf{Kd} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ R \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{16EI} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \quad (9.35)$$

ここでの剛性行列 \mathbf{K} は、曲げ剛性 EI と部材長さ L を右側に移項したため、無次元的なものとなる。

剛性行列 \mathbf{K} の逆行列 \mathbf{K}^{-1} は、すぐに求められる¹。

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 39 & 5 & 11 & 9 & -40 \\ -6 & 14 & 2 & 6 & -16 \\ 6 & 2 & 14 & -6 & -16 \\ 9 & 11 & 5 & 39 & -40 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & -32 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

したがって、未知数の材端たわみ角および節点移動による回転角を表す変位ベクトル \mathbf{d} は以下のように求められる。

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ R \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 39 & 5 & 11 & 9 & -40 \\ -6 & 14 & 2 & 6 & -16 \\ 6 & 2 & 14 & -6 & -16 \\ 9 & 11 & 5 & 39 & -40 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & -32 \end{bmatrix} \times \frac{PL^2}{16EI} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{768EI} \begin{pmatrix} 229 \\ 46 \\ 82 \\ 187 \\ 152 \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

各部材両端部の曲げモーメントとたわみ角の関係式より、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{pmatrix} &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\gamma_{AB} - 2\gamma_{BA} \\ -2\gamma_{AB} - 4\gamma_{BA} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \frac{PL^2}{768EI} \begin{pmatrix} 229 \\ 46 \\ 82 \\ 187 \\ 152 \end{pmatrix} + \frac{PL^2}{8EI} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{PL}{128} \begin{pmatrix} 0 \\ -29 \\ 29 \\ 35 \\ -35 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.38) \end{aligned}$$

9.5 宿題

Exercise 9.1. 図9.14に示すラーメン構造物に対して、

- たわみ角法を使って、曲げモーメントを求めてください。
- $\alpha = 0$ の時の曲げモーメント分布図および変形図を描いてください。
- $\alpha = \infty$ の時の曲げモーメント分布図および変形図を描いてください。

¹ MSエクセルで逆行列などの行列計算は、例えば以下のリンクを参考にしてください。
<http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/maiko/mathBA/ExcelMatrix.pdf>。それ以外にも、行列計算専門の Matlab やそのただのバージョンである Octave などがある。

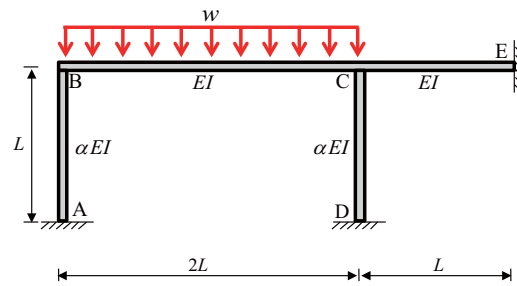


図 9.14 宿題9.1

ただし、部材 BC,CE の曲げ剛性を EI とし、部材 AB, CD の曲げ剛性をその α 倍の αEI とする。

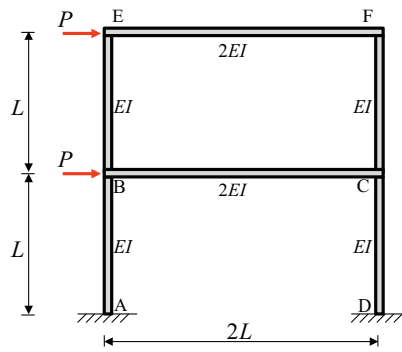


図 9.15 宿題9.2

Exercise 9.2. 図9.15に示す2階建ての不静定ラーメン構造に対して

- その不静定次数を判断してください。
- たわみ角法を使って、曲げモーメント分布図と変形図を描いてください。

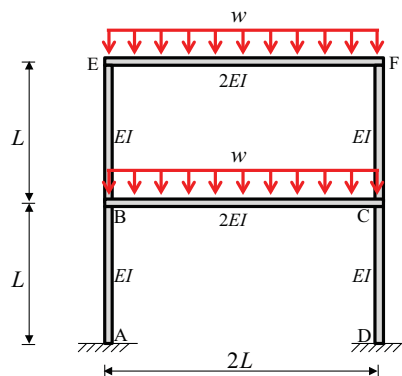


図 9.16 宿題9.3

Exercise 9.3. 図9.16に示す2階建ての不静定ラーメン構造に対して

- (a) たわみ角法を使って、釣合い方程式を立ててください。
- (b) 上記の釣合い方程式を行列でまとめ、マトリックス法で解いてください。