

Chapter 8 不静定構造の断面力

Abstract この章には、不静定構造を対象とし、仮想仕事法に基づいたその断面力を求める方法について説明する。その際に、力とモーメントの釣合い方程式のみで解けないため、仮想仕事を用いて変位を求め、変位の適合条件で不足の方程式を立てる必要がある。

8.1 不静定構造の定義と解法

中小規模の地震を想定した場合、構造物が損傷しないという機能性を確保するため、局所に生じる（最大）応力（度）は許容応力度以下となるように設計しないとできない。これは許容応力度設計法または一次設計の基本考え方である。

また、応力を計算するのに、断面力の分布が必要である。前章までは静定構造を対象として、力・モーメントの釣合い方程式のみですべての反力および断面力を求めてきた。しかし、静定構造は構造物の安定性を確保するために必要最低限の部材しかないため、例えば一本の部材が壊れてしまうと、構造物全体が崩壊する恐れがある。そのため、構造物の冗長性を増やすために、必要数以上の部材が使われているのは実用においてほとんどのケースである。

必要数以上の部材をもつ構造物の断面力および反力を求めるのに、力とモーメントの釣合い方程式のみでは解けない。こういった構造物は不静定構造と呼ばれている。

不静定構造の定義：

不静定構造とは、力・モーメントの釣合い方程式のみですべての反力および断面力を求めることができない構造物である。

ようするに、未知数の数は（釣合い）方程式の数より大きいので、そのままでは解けない。不静定構造が解けるようにするために、不足している分の方程式を立てるために、変位の適合条件を追加しないとできない。ここで、第7章で習った静定構造の変位を求める解法（単位荷重法）が必要となる。

不静定構造の断面力を求める基本的な考え方は以下ようになる。説明を簡単にするため、一次不静定構造を例として説明し、構造物にかかる外力を P で表す。

仮想仕事法による不静定構造の計算手順：

1. 拡張 Maxwell's ルールを適用し、不静定次数を求める。
2. 不静定次数に相当する数の拘束を解放することによって、不静定構造を静定基本形に変換する。この場合、解放された自由度に（未知の）外力 X を加える。
3. 静定基本形に対して、外力 P および未知外力 X による解放自由度の変位 u_P と u_X をそれぞれ求める。
4. 静定基本形における u_P と u_X による総合効果は、原問題での u と同じとしないとできない。したがって、

$$u_P + u_X = u \quad (8.1)$$

という変位に関する方程式が立てられる。

5. 上記の変位適合条件と力・モーメントの釣合い方程式と連立し、未知の外力 X を求める。
6. 変換された静定構造に対して、外力 P および X が同時にかかるときの断面力を求める。

ここで、解放される自由度の数は構造物の不静定次数と同じでないと静定基本形にならない。高次不静定構造の場合に、本章で紹介する方法はややこしくなるので、次章にはより実用的なたわみ角法について説明する。

8.2 不静定トラス構造

トラス構造の場合には、Maxwell's ルール式 (4.4) はそのまま適用できる。例えば、図8.1(a) に示す不静定トラス構造に対して、節点 B の水平方向の変位を経由して、部材の軸力を求める問題を考える。

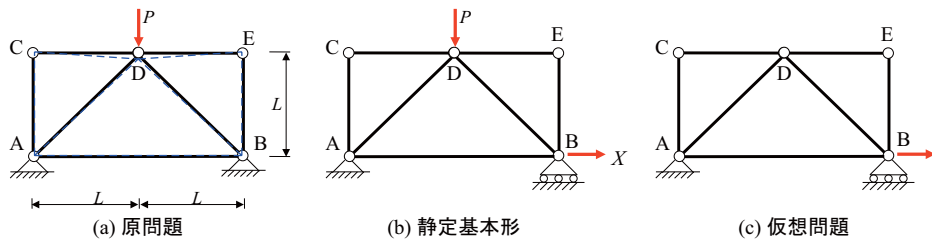


図 8.1 不静定トラス構造の例題

例 8.1. 図8.1(a) に示すトラス構造に対して

- (a) Maxwell's ルールによりこのトラス構造の静定性を判定し、不静定の場合にその不静定次数を明記してください。
- (b) 仮想仕事法によってこの構造の軸力を求めてください。

ただし、各部材の軸剛性を同じように EA とする。

□

小問 (a)

図8.1(a) のトラス構造は、7本の部材 ($m=7$)、5個の節点 ($n=5$) および4つの反力 ($p=4$) があるので、Maxwell's ルール式 (4.4) を適用すれば、

$$m - n \times d + p = 7 - 5 \times 2 + 4 = 1 \quad (8.2)$$

したがって、このトラス構造は一次不静定である。

小問 (b)

一次不静定構造を静定基本形に変換するため、一つの拘束された自由度 (反力) を解放する必要がある。ここで、B 点の水平方向の変位を解放とし、その静定基本形は図8.1(b) で示す。もともとの B 点の水平方向にかかっている反力 H_B を外力 X とする。 X はいまのところ未知数である。

反力の数が一つ少なくなり、図8.1(b) に示す変換されたトラス構造に対して Maxwell's ルールを適用した結果はゼロとなるため、静定であることを意味する。これは、図8.1(b) の構造物を静定基本形と呼ばれる理由である。

外力 P と X による B 点の水平変位 u_B^P と u_B^X を求めるには、第 7 章に説明した仮想仕事の原理に基づいた単位荷重法を使えばよい。したがって、図 8.1(c) に示すように、B 点の水平方向に単位荷重を加える仮想問題を考える。

計算の途中結果を省略するが、変換された静定基本形にかかる外力 P および X による各部材の軸力 N_k^P と N_k^X 、また仮想問題における各部材の軸力 \bar{N}_k を式 (8.7) にまとめる。

部材	N_k^P	N_k^X	\bar{N}_k	L_k	$\frac{N_k^P \bar{N}_k L_k}{EA}$	$\frac{N_k^X \bar{N}_k L_k}{EA}$
AB	$P/2$	X	1	$2L$	$PL/(EA)$	$2XL/(EA)$
AC	0	0	0	L	0	0
AD	$-\sqrt{2}P/2$	0	0	$\sqrt{2}L$	0	0
BD	$-\sqrt{2}P/2$	0	0	$\sqrt{2}L$	0	0
BE	0	0	0	L	0	0
CD	0	0	0	L	0	0
DE	0	0	0	L	0	0
合計($u_B^{P,X} =$)					$PL/(EA)$	$2XL/(EA)$

図 8.1(a) に示す原問題においては、B 点が拘束されているため、外力 P が加えてもその水平変位 u_B がゼロであるはず。したがって、B 点の水平変位を解放された静定基本形は原問題との対応関係によって、 P と X による B 点の変位 u_B^P と u_B^X の総合効果 (和) は、原問題における u_B と同じとなり、以下の変位の適合条件が得られる。

$$u_B^P + u_B^X = u_B = 0 \quad (8.4)$$

式 (8.3) で計算した u_B^P と u_B^X をそれぞれ上記の式に代入すると、未知の外力 X (原問題の反力 H_B) は、以下のように求めることができる。

$$u_B^P + u_B^X = \frac{L}{EA}P + \frac{2L}{EA}X = 0 \quad (8.5)$$

$$\Rightarrow X = -\frac{P}{2} \quad (\leftarrow) \quad (8.6)$$

したがって、外力 P と反力 $X (= -P/2)$ が同時に作用したときの各部材の軸力は以下のように計算できる。

部材	N_k^P	N_k^X	$\bar{N}_k = N_k^P + N_k^X$
AB	$P/2$	$-P/2$	0
AC	0	0	0
AD	$-\sqrt{2}P/2$	0	$-\sqrt{2}P/2$
BD	$-\sqrt{2}P/2$	0	$-\sqrt{2}P/2$
BE	0	0	0
CD	0	0	0
DE	0	0	0

部材 AB の軸力がゼロとなっているが、その両側に拘束されているため、AB の軸力はほかの部材の軸力と無関係であるため、その軸力は任意となる。

8.3 不静定梁

不静定梁の断面力も、不静定トラス構造のと同様で計算できる。ただし、梁の不静定次数の判定は、式 (5.1) の拡張 Maxwell's ルールを適用する。その際に、梁の回転拘束を適切に解放し、トラスモデルに変換する必要がある。たとえば、図 8.2 に示す不静定梁の曲げモーメント分布を求める問題を考える。

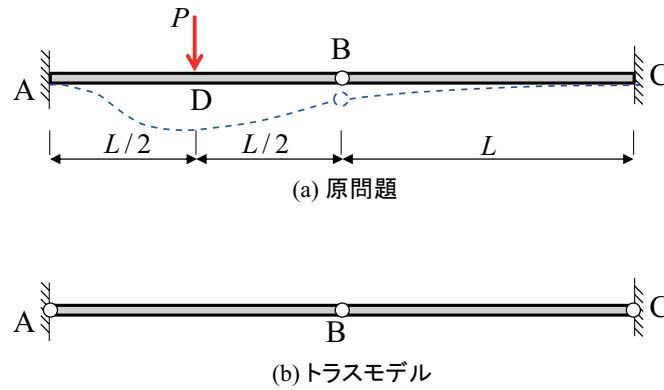


図 8.2 不静定梁の例題

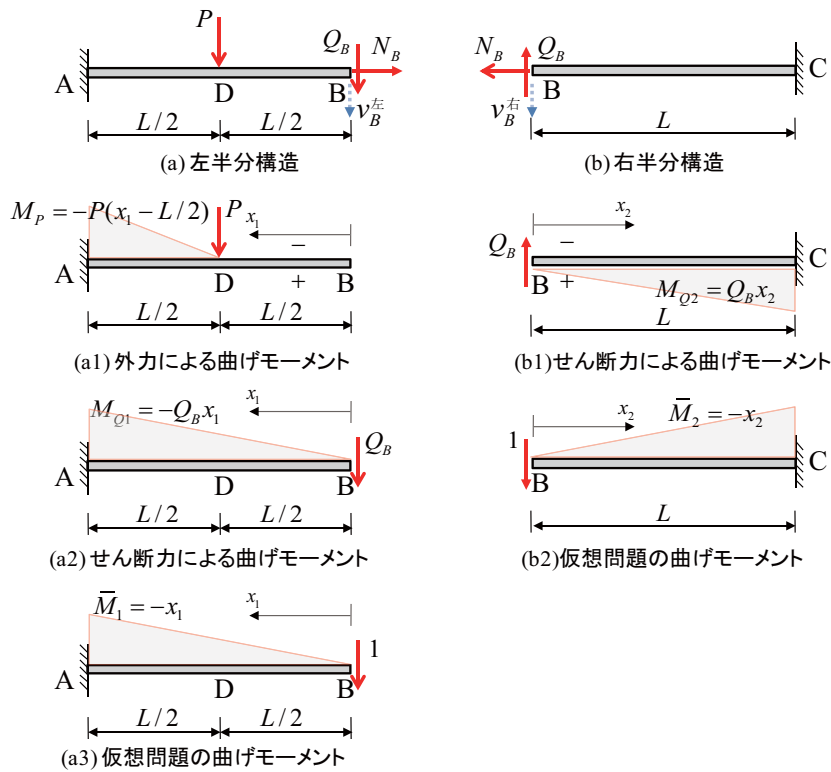


図 8.3 不静定梁の断面力計算

例 8.2. 図8.2(a) に示す梁に対して

- (a) この梁の静定性を判定し、不静定の場合にはその不静定次数を明記してください。
- (b) この梁の曲げモーメント分布を求めてください。

ただし、曲げ剛性は EI となる。軸変形とせん変形を無視する。

□

小問 (a)

図8.2(a) に示す梁をトラスモデルに変換するため、図8.2(b) に示すように両側の固定支点を回転を解放する。したがって、トラスモデルには部材数 m が2、節点数 n は3、反力数 p は

4、解放された回転数 q は 2 である。式 (5.1) の拡張 Maxwell's ルールによると、その不静定次数は

$$m - n \times d + p + q = 2 - 3 \times 2 + 4 + 2 = 2 \quad (8.8)$$

となり、この不静定梁は、2 次不静定構造である。しかし、2 本の部材が一直線にあり、曲げモーメントの分布を求める際に、軸変形を無視できるため、この梁は実質的に 1 次不静定構造として考えてよい。

小問 (b)

不静定梁を静定基本形に変換するのに、ここで、B 点を仮想的に切断する。そうすると、図 8.3(a),(b) に示す左半分も右半分も静定の片持ち梁となる。B 点はピン接合であり、曲げモーメントがゼロのため、未知数は、B 点にかかるせん断力 Q_B と軸力 N_B である。

また、その左半分モデルも右半分モデルも、前半の内容で取り扱っている片持ち梁であるため、明らかにそれぞれ静定構造である。未知数力（反力または断面力）を「既知」として、不静定構造物を静定基本形に変換し、変換前後において変位の適合条件を使って方程式を立てるのは、不静定構造を解くポイントとなる。

図からでも分かるように、軸力 N_B による曲げモーメントは無視できるため、せん断力 Q_B のみを未知数として考慮すればよい。左半分および右半分構造の外力、せん断力および B 点の変位を求めるための仮想問題における曲げモーメントの分布は以下のようになる。

区間	モーメント		
	P による	Q_B による	単位荷重による
DB 間 ($0 \leq x_1 \leq L/2$)	$M_P = 0$	$M_{Q_1} = -Q_B \cdot x_1$	$\bar{M}_1 = -x_1$
AD 間 ($L/2 < x_1 \leq L$)	$M_P = -P(x_1 - L/2)$	$M_{Q_1} = -Q_B \cdot x_1$	$\bar{M}_{x_1} = -x_1$
BC 間 ($0 \leq x_2 \leq L$)		$M_{Q_2} = Q_B \cdot x_2$	$\bar{M}_2 = -x_2$

ここで、梁の下側は引張側となる曲げモーメントを正とする。

左半分と右半分の計算モデルに対して、外力荷重 P による B 点のたわみ v_B^P およびせん断力 Q_B による左と右半分における B 点のたわみ $v_B^{Q_1}$ と $v_B^{Q_2}$ は、以下のよう求められる。

$$\begin{aligned} v_B^P &= \int_0^L \frac{M_P \bar{M}_1}{EI} dx_1 = \int_0^{L/2} \frac{0 \cdot (-x_1)}{EI} + \int_{L/2}^L \frac{[-P(x_1 - L/2)] \cdot (-x_1)}{EI} dx_1 = \frac{5PL^3}{48EI} \\ v_B^{Q_1} &= \int_0^L \frac{M_{Q_1} \bar{M}_1}{EI} dx_1 = \int_0^L \frac{(-Q_B x_1) \cdot (-x_1)}{EI} dx_1 = \frac{Q_B L^3}{3EI} \\ v_B^{Q_2} &= \int_0^L \frac{M_{Q_2} \bar{M}_2}{EI} dx_2 = \int_0^L \frac{(Q_B x_2) \cdot (-x_2)}{EI} dx_2 = -\frac{Q_B L^3}{3EI} \end{aligned} \quad (8.10)$$

左半分において B 点のたわみは $v_B = v_B^P + v_B^{Q_1}$ であり、右半分において B 点のたわみは $v_B = v_B^{Q_2}$ 同じでなければ、梁構造は壊れてしまうため、せん断力は以下のようになる。

$$v_B = v_B^P + v_B^{Q_1} = v_B = v_B^{Q_2} \quad (8.11)$$

$$\implies \frac{5PL^3}{48EI} + \frac{Q_B L^3}{3EI} = -\frac{Q_B L^3}{3EI} \quad (8.12)$$

$$\implies Q_B = -\frac{5}{32}P \quad (8.13)$$

不静定梁の全体の曲げモーメントは、以下のよう求められる。

区間	曲げモーメント
DB 間 ($0 \leq x_1 \leq L/2$)	$M = M_P + M_{Q_1} = -Q_B x_1 = \frac{5}{32} P x_1$
AD 間 ($L/2 < x_1 \leq L$)	$M = M_P + M_{Q_1} = -P(x_1 - L/2) - Q_B x_1 = -\frac{27}{32} P x_1 + \frac{1}{2} PL$
BC 間 ($0 \leq x_2 \leq L$)	$M = M_{Q_2} = Q_B x_2 = -\frac{5}{32} P x_2$

その曲げモーメントの分布図は図8.4に示す。図より、左の固定端の曲げモーメントは片持ち梁のみの $PL/2$ より小さいため、右半分の梁もその一部外力を負担していることが分かる。

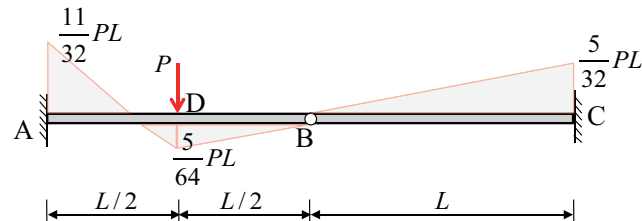


図 8.4 一次不静定梁の曲げモーメント分布図

8.4 不静定ラーメン構造

不静定ラーメン構造の断面力（主に曲げモーメント）は、梁と同じように求めることができる。計算空間が多くなるのは特徴である。例えば、図8.5(a)に示す（一次不静定）ラーメン構造を考える。

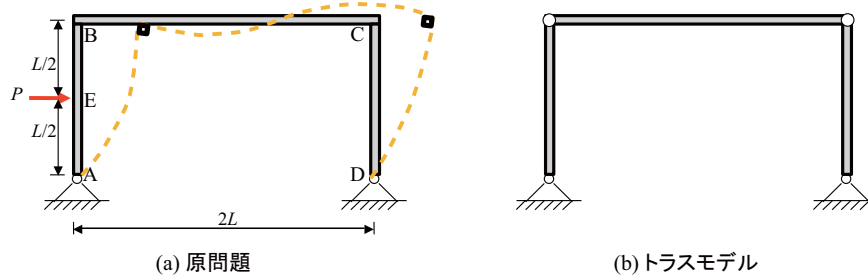


図 8.5 不静定ラーメン構造の例題

例 8.3. 図8.5(a)に示すラーメン構造に対して

- このラーメン構造の静定性を判定し、不静定の場合にはその不静定次数を明記してください。
- このラーメン構造の曲げモーメント分布を求めてください。

ただし、各部材の曲げ剛性は同じく EI とする。

□

小問 (a)

原問題の図8.5(a)をトラスモデルに変換するため、図8.5(b)に示すようにB点とC点の回転を解放する。図8.5(b)のトラスモデルには、部材数 m が3、節点数 n が4、反力の数 p が4、解放された回転の数 q が2となるため、

$$m - n \times d + p + q = 3 - 4 \times 2 + 4 + 2 = 1 \quad (8.15)$$

となり、このラーメン構造は1次不静定である。

小問 (b)

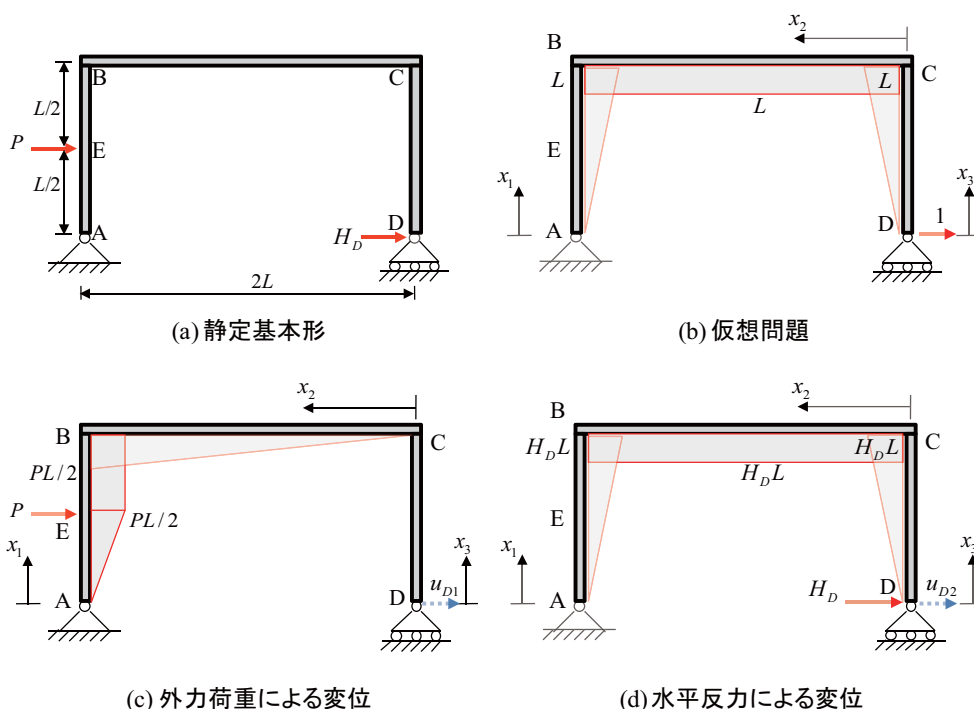


図 8.6 一次不静定ラーメン構造

一次不静定のラーメン構造を静定基本形に変換するため、一つの自由度を解放する必要がある。ここで、図8.6(a)に示すように、D点の水平変位を解放し、その反力 H_D を外力荷重とする。

従って、もとの不静定構造の計算問題は、図8.6(c)と(d)に示すような静定基本形に外力荷重 P および H_D が作用する問題となる。それぞれ問題におけるD点の水平変位 u_{D1} と u_{D2} の総和は、ゼロとなる：

$$u_{D1} + u_{D2} = 0 \tag{8.16}$$

これは、変換された静定基本形の問題は、もとの不静定構造の問題と一致しないといけない。もとの不静定構造の問題においては、D点の水平変位はピン支持によって拘束されているため、静定基本形の問題において、外力荷重 P および H_D によるDの水平変位の総和はゼロとしないといけない。

静定基本形の変位問題は、第7章で説明した単位荷重法が適用できる。図7.12に示す局所座標系と曲げモーメントの正方向を採用する。D点の水平変位を求めるため、静定基本形においてD点の水平方向に大きさ1の単位荷重が作用する仮想問題(図8.6(b))を考える。

静定基本形において、外力荷重 P (図8.6(c))、 H_D (図8.6(d))、および単位荷重(図8.6(b))による曲げモーメントの分布は、以下のようにまとめられる。

区間	問題 1 : 荷重 P	問題 2 : 荷重 H_D	仮想問題
AE 間 ($0 \leq x_1 \leq L/2$)	${}_1M_{x_1} = -Px_1$	${}_2M_{x_1} = -H_Dx_1$	$\bar{M}_{x_1} = -x_1$
EB 間 ($L/2 < x_1 \leq L$)	${}_1M_{x_1} = -PL/2$	${}_2M_{x_1} = -H_Dx_1$	$\bar{M}_{x_1} = -x_1$
BC 間 ($0 \leq x_2 \leq 2L$)	${}_1M_{x_2} = Px_2/4$	${}_2M_{x_2} = H_DL$	$\bar{M}_{x_2} = L$
CD 間 ($0 \leq x_3 \leq L$)	${}_1M_{x_3} = 0$	${}_2M_{x_2} = H_Dx_3$	$\bar{M}_{x_3} = x_3$

外力荷重 P によるD点の水平変位 u_{D1} は、前章の式(7.33)を使った。単位荷重法によると、外力荷重 P によるD点の水平変位 u_{D2} は、以下のように求める。

$$\begin{aligned}
 u_{D2} &= 1 \cdot u_{D2} = \int_0^L \frac{(-H_D x_1)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{2L} \frac{(H_D L)(L)}{EI} dx_2 + \int_0^L \frac{(H_D x_3)(x_3)}{EI} dx_3 \\
 &= \left[\frac{H_D x_1^3}{3EI} \right]_0^L + \left[\frac{H_D L^2 x_2}{EI} \right]_0^{2L} + \left[\frac{H_D x_3^3}{3EI} \right]_0^L = \frac{8H_D L^3}{3EI}
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

変位適合条件の式 (8.16) によると、反力 H_D は以下のように求められる。

$$u_{D1} + u_{D2} = \frac{35PL^3}{48EI} + \frac{8H_D L^3}{3EI} = 0 \tag{8.19}$$

$$\Rightarrow H_D = -\frac{35}{128}P \quad (\leftarrow) \tag{8.20}$$

もとの不静定構造の曲げモーメント M は、静定基本形の外力 P と H_D によるものの総和であるため、その式は

区間	曲げモーメント
AE 間 ($0 \leq x_1 \leq L/2$)	$M_{x_1} = -Px_1 - H_D x_1 = -\frac{93}{128}Px_1$
EB 間 ($L/2 < x_1 \leq L$)	$M_{x_1} = -PL/2 - H_D x_1 = -\frac{1}{2}PL + \frac{35}{128}Px_1$
BC 間 ($0 \leq x_2 \leq 2L$)	$M_{x_2} = Px_2/4 + H_D L = \frac{1}{4}Px_2 - \frac{35}{128}PL$
CD 間 ($0 \leq x_3 \leq L$)	$M_{x_3} = 0 + H_D x_3 = -\frac{35}{128}Px_3$

(8.21)

となり、不静定構造の曲げモーメント分布図は図8.7に示す。

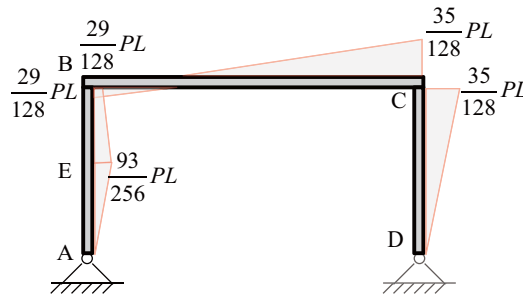


図 8.7 一次不静定ラーメン構造の曲げモーメント分布図

8.5 宿題

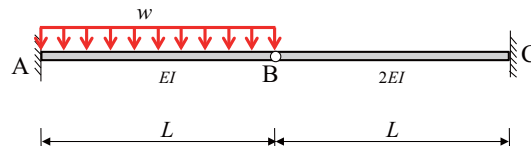


図 8.8 梁の曲げモーメント計算問題

Exercise 8.1. 図8.8の梁に対して

(a) この梁の静定性を判定し、不静定の場合にその不静定次数を明記してください。

- (b) この梁を一次不静定構造として、その曲げモーメント分布を求めてください。
 (c) この梁の変形図を描いてください。

ただし、部材 AB の曲げ剛性を EI 、部材 BC の曲げ剛性を $2EI$ とする。

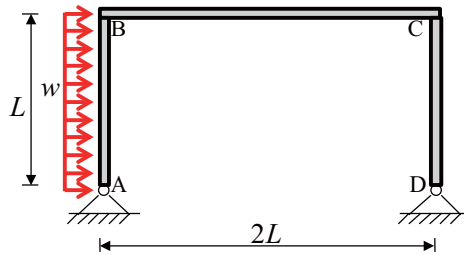


図 8.9 ラーメン構造の曲げモーメント計算問題

Exercise 8.2. 図8.9のラーメン構造に対して

- (a) このラーメン構造の静定性を判定し、不静定の場合にその不静定次数を明記してください。
 (b) このラーメン構造の曲げモーメント分布を求めてください。
 (c) このラーメン構造の変形図を描いてください。

ただし、すべての部材曲げ剛性を EI とする。