

Chapter 7 静定構造の変形

Abstract この章には、外力荷重による静定梁・静定ラーメン・静定トラス構造の変形を求める方法について解説する。梁とラーメン構造には、曲げモーメントによる変形が支配となっているため、この二種類の構造物には曲げモーメントによる変形のみを考える。方法としては、弾性曲線式、モールの定理、仮想仕事法などがある。弾性曲線式は、梁のみに適応できる。モールの定理も梁のための方法だが、曲げモーメントが複雑な場合にも適応できる。また、仮想仕事法は一般性のある方法で、構造種別に関係せずどれにも適応できる。

7.1 弾性曲線式による梁の変形

7.1.1 基本式

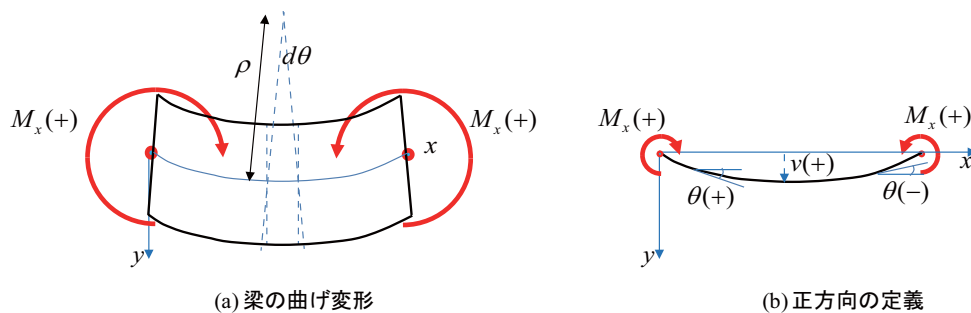


図 7.1 梁の曲げ変形

梁の曲げによる変形は図7.1に示す。また、図中の座標系に対応して、各パラメータの正方向の定義は図7.1(b)に示す。

梁の曲げ変形を求めるために定められた正方向の定義：

- y の正方向は、たわみ（鉛直方向の変位） v の正方向とする。
- x 軸との角度は時計回り方向を、たわみ角（回転角） θ の正方向とする。
- 梁を y の正方向に膨らませる方向は、曲げモーメント M_x の正方向¹とする。

¹ 前章までは曲げモーメントの正方向がなかったが、ここでは曲げによる変位を求め、変位の正方向が決まっているため、それに合わせて曲げモーメントの正方向を定めている。あくまでも合わせた正方向なので、この正方向の定義はほかの構造物に一般性を持たない。

第6章で、曲げモーメントによる垂直応力を求めるには、曲げモーメントと曲率 ϕ の関係式があった。

$$M_x = EI\phi = -EI \frac{d\theta}{dx} = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.1)$$

ここの式のマイナス(-)も曲げモーメントの正方向およびたわみに合わせたものであり、梁は y の正方向に膨らむとき、その二回微分はマイナスとなる。上式を整理すると、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{EI} \quad (7.2)$$

となる。それぞれ1回と2回積分すると、たわみ角 θ とたわみ v は以下のように書ける。

曲げモーメントによる梁のたわみ・たわみ角：

$$\begin{aligned} \theta &= -\int \frac{M_x}{EI} dx + C_1 \\ v &= \int \theta dx + C_2 = -\int \left(\int \frac{M_x}{EI} dx \right) dx + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

ここで、 C_1 と C_2 は未定の積分定数であり、境界条件 (Boundary Condition) によって決める。

また、積分の範囲が定めていないことを注意してほしい。ようするに、積分の結果は x の関数であり、梁全体の変形を表している。

7.1.2 曲げモーメントの式は一つの場合

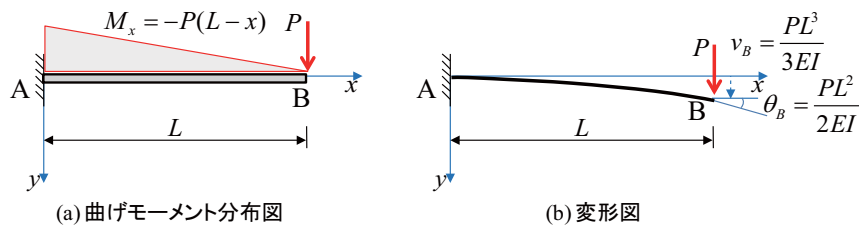


図 7.2 片持梁の曲げ変形

梁の曲げモーメントは一つの式で表現できる場合、その変形の計算は比較的簡単で、例題としては、図7.2の片持梁の変形を考える。

例 7.1. 図7.2の片持梁の変形を求めてください。

曲げモーメントの計算を省略するが、その分布は

$$M_x = -P(L-x) \quad (7.4)$$

である。式 (7.3) の積分式によっては、

$$\begin{aligned} \theta(x) &= -\int \frac{M_x}{EI} dx + C_1 = \int \frac{P(L-x)}{EI} dx + C_1 = \frac{P}{EI} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \\ v(x) &= \int \theta dx + C_2 = \frac{P}{EI} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

が分かる。ここで、未知数 C_1 と C_2 という二つがあるため、二つの条件式が必要となる。それは、左の固定端 ($x=0$) におけるたわみ $v(0)$ およびたわみ角 $\theta(0)$ はゼロということが利用できる。したがって、

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta(0) = C_1 = 0 &\implies C_1 = 0 \quad (x=0) \\ v_B = v(0) = C_2 &\implies C_2 = 0 \quad (x=0)\end{aligned}\quad (7.6)$$

であり、式 (7.5) に代入すると、片持梁のたわみ角およびたわみは以下ようになる。

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{P}{EI} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right), \\ v(x) &= \frac{P}{EI} \left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)\end{aligned}\quad (7.7)$$

その変形図は図7.2(b)と(c)に示す。この式によると梁の任意の位置の変形（たわみまたはたわみ角）を求めることができる。たとえば、自由端 ($x=L$) のたわみ角とたわみは

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta(L) &= \frac{PL^2}{2EI}, \\ v_B = v(L) &= \frac{PL^3}{3EI}\end{aligned}\quad (7.8)$$

簡単な物理実験とたわみおよびたわみ角の正方向の定義によっても、この結果が正しいと確認できる。

7.1.3 曲げモーメントの式は多数の場合

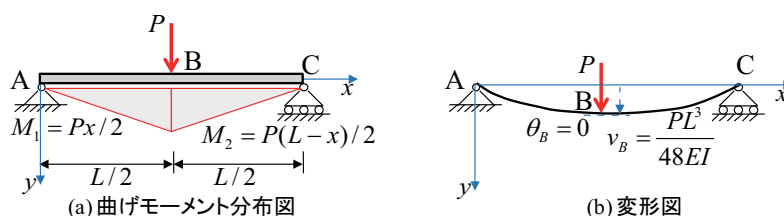


図 7.3 単純梁の曲げ変形

曲げモーメントは一つの式で表せない場合には、弾性曲線式による変形計算は少しややこしくなる。例えば、図7.3の単純梁の変形を考えてみる。

例 7.2. 図7.3の単純梁の変形を求めてください。

計算の詳細が省略するが、図7.3の単純梁の曲げモーメント分布は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\text{AB 間}(0 \leq x \leq \frac{L}{2}): & \quad M_1 = \frac{P}{2}x \\ \text{BC 間}(\frac{L}{2} \leq x \leq L): & \quad M_2 = \frac{P}{2}(L-x)\end{aligned}\quad (7.9)$$

弾性曲線式 (7.3) をそれぞれの空間に対して適用すると

AB 間($0 \leq x \leq \frac{L}{2}$):

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= -\int \frac{M_1}{EI} dx + C_1 = -\int \frac{Px}{2EI} dx + C_1 = -\frac{Px^2}{4EI} + C_1 \\ v_1(x) &= \int \theta_1 dx + C_2 = \int -\frac{Px^2}{4EI} dx + C_1 x + C_2 = -\frac{Px^3}{12EI} + C_1 x + C_2\end{aligned}$$

BC 間($\frac{L}{2} \leq x \leq L$):

$$\begin{aligned}\theta_2(x) &= -\int \frac{M_2}{EI} dx + C_3 = -\int \frac{P(L-x)}{2EI} dx + C_3 = -\frac{P}{4EI}(2Lx - x^2) + C_3 \\ v_2(x) &= \int \theta_2 dx + C_4 = \int -\frac{P}{4EI}(2Lx - x^2) dx + C_3 x + C_4 = -\frac{P}{12EI}(3Lx^2 - x^3) + C_3 x + C_4\end{aligned}\tag{7.10}$$

ここで、 C_1, C_2, C_3, C_4 という四つの未知数があるため、四つの（境界）条件式が必要となる。それは、両端部 ($x=0, x=L$) においてのたわみがゼロによって、以下の二つの方程式がある。

$$\begin{aligned}v_1(0) = C_2 = 0 &\implies C_2 = 0 \\ v_2(L) = -\frac{PL^3}{6EI} + LC_3 + C_4 = 0 &\implies -\frac{PL^3}{6EI} + LC_3 + C_4 = 0\end{aligned}\tag{7.11}$$

また、B 点 ($x=L/2$) は二つの計算空間の共通な部分であり、それぞれの空間において B 点のたわみおよびたわみ角は

$$\begin{aligned}v_1(L/2) &= -\frac{PL^3}{96EI} + \frac{L}{2}C_1 + C_2, \\ v_2(L/2) &= -\frac{5PL^3}{96EI} + \frac{L}{2}C_3 + C_4, \\ \theta_1(L/2) &= -\frac{PL^2}{16EI} + C_1, \\ \theta_2(L/2) &= -\frac{3PL^2}{16EI} + C_3\end{aligned}\tag{7.12}$$

である。B 点の両側は破断しない限りに、両側のたわみとたわみ角が同じ（変形の連続条件）なので、さらに以下のような二つの方程式を書ける。

$$\begin{aligned}v_1(L/2) = v_2(L/2) &\implies = \frac{PL^3}{12EI} + LC_1 + 2C_2 - LC_3 - 2C_4 = 0 \\ \theta_1(L/2) = \theta_2(L/2) &\implies = \frac{PL^2}{8EI} + C_1 - C_3 = 0\end{aligned}\tag{7.13}$$

したがって、四つの未知数に対して、四つの方程式があるため、それを解くと、未知数は

$$C_1 = \frac{PL^2}{16EI}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{3PL^2}{16EI}, \quad C_4 = \frac{-PL^3}{48EI}\tag{7.14}$$

となり、単純梁のたわみ角とたわみ角は

$$\begin{aligned}
 \text{AB 間}(0 \leq x \leq L/2): \quad & \theta_1(x) = -\frac{Px^2}{4EI} + \frac{PL^2}{16EI} \\
 & v_1(x) = -\frac{Px^3}{12EI} + \frac{PL^2}{16EI}x \\
 \text{BC 間}(L/2 \leq x \leq L): \quad & \theta_2(x) = -\frac{P}{4EI}(2Lx - x^2) + \frac{3PL^2}{16EI} \\
 & v_2(x) = -\frac{P}{12EI}(3Lx^2 - x^3) + \frac{3PL^2}{16EI}x - \frac{PL^3}{48EI}
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

となる。中央点 ($x = L/2$) のたわみ角とたわみは

$$\begin{aligned}
 \theta_B = \theta_1(L/2) = \theta_2(L/2) &= 0, \\
 v_B = v_1(L/2) = v_2(L/2) &= \frac{PL^3}{48EI}
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

となる。上記の式から、以下の討論はできる。

1. たわみは正であるため、梁の中央点は y の正方向に変形することを意味する（物理的にも一致する）。
2. 構造物および外力荷重は中央点を境界にしてミラー対称であり、中央点のたわみ角は両側にも同じとならないとできないため、結局ゼロであることは、対称性からも分かる。
3. たわみ角はたわみの一回微分であるため、たわみ角はゼロとなる場合に、たわみは極限值を取る。単純梁の中央点におけるたわみ角はゼロであるため、中央点のたわみは最大であることを実証している。

例題7.2によっては、曲げモーメントが複数の式で表現する梁に対して、弾性曲線式による解法は以下のようにまとめることができる。

弾性曲線式による梁の曲げ変形の求め方：

1. 各計算空間に対して弾性曲線式を使って、それぞれ一回と二回積分を行う。
2. 梁全体の境界条件によって方程式を立てる。
3. 隣接な計算空間の境界点におけるたわみおよびたわみ角の変形連続条件によって方程式を立てる。
4. 未知数（積分定数）の数と方程式の数的一致を確認し、連立方程式を解くことによって未知の積分定数を求める。
5. 積分定数を各計算空間のたわみおよびたわみ角方程式に代入し、代表点（境界点、変形最大点など）の変形を求める。

7.2 モールの定理

前節の弾性曲線式による曲げ変形を求めるには、曲げモーメントは一つの式で表せない場合に、計算はかなり複雑となっている。こういうケースに対して、この節では、たわみ、たわみ角および曲げモーメントの関係式は、第5章で習った $M-Q$ 関係式との相似性に基づいて開発されたモールの定理について説明する。しかし、モールの定理はいまほとんど使われていないため、授業中では詳しく説明しないとする。この節の内容を参考として残しておく。余力のある方は一度目を通してください。

$$\begin{aligned}\frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right) = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{EI} \\ \frac{d^2M_x}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dM_x}{dx} \right) = \frac{dQ_x}{dx} = -w_x\end{aligned}\quad (7.17)$$

ここで、曲げモーメントの正方向は第5章に用いたものと反対なので、符号が違う。上の式によつては、以下の相似関係は明らかである。

$$\begin{aligned}\text{変位} & & \text{力} \\ v & \iff \bar{M}_x \\ \theta & \iff \bar{Q}_x \\ M_x/(EI) & \iff \bar{w}_x\end{aligned}\quad (7.18)$$

ここで、区別のため、力おける諸量に $(\bar{\cdot})$ をつけた。以上の相似性によって、変位を求める原問題を、力を求める共役問題に変換できる。この場合、原問題の曲げモーメント分布 M_x と曲げ剛性 EI の比を、共役問題の分布荷重 \bar{w}_x に変換する必要があり、さらに、原問題の解析モデルも変位および力の境界条件の対応関係によって、共役問題の解析モデルに変換しないとできない。これで、力を求める問題は、ここまでやってきたし、解法自体も変位問題より簡単である。

7.2.1 片持梁

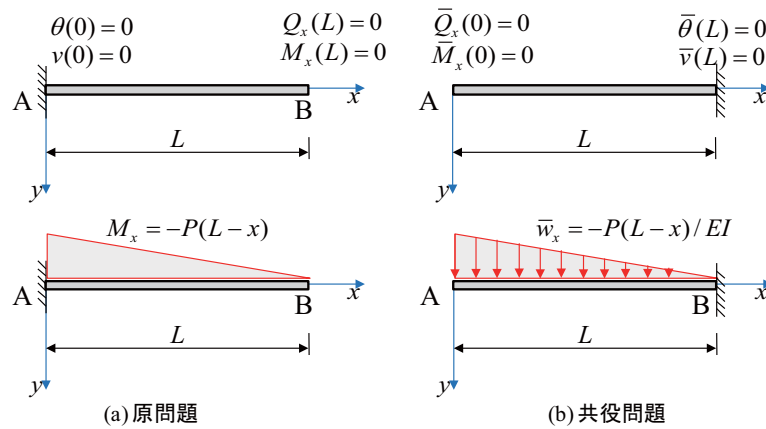


図 7.4 片持梁の変位を求めるための原問題と共役問題

図7.2の例題を考える。原問題と共役問題の解析モデルは対応関係によって以下のように変換する。

	原問題	共役問題		
変位の境界条件	$v(0) = 0$	\implies	$\bar{M}_x(0) = 0$	(7.19)
	$\theta(0) = 0$	\implies	$\bar{Q}_x(0) = 0$	
力の境界条件	$M_x(L) = 0$	\implies	$\bar{v}(L) = 0$	
	$Q_x(L) = 0$	\implies	$\bar{\theta}(L) = 0$	
外力荷重	$M_x = -P(L-x)$	\implies	$\bar{w}_x = -\frac{P(L-x)}{EI}$	

したがって、共役問題の解析モデルは図7.4(b)のようになる。

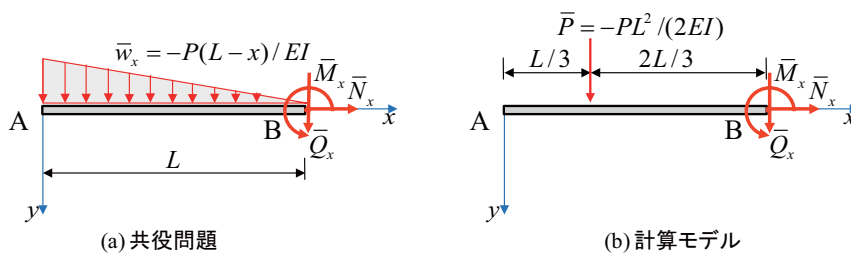


図 7.5 片持梁自由端の変形

原問題において自由端 B 点のたわみ $v_B = v(L)$ とたわみ角 $\theta_B = \theta(L)$ を求める問題は、図7.5に示すような共役問題において固定端 B 点の曲げモーメント $\bar{M}_x(L)$ とせん断力 $\bar{Q}_x(L)$ となる。ここで、曲げモーメントの正方向は、梁を y の正方向に膨らませるように定義されていることを注意してください。したがって、

$$\sum Y = \bar{Q}_x + \bar{P} = 0 \implies \theta_B = \bar{Q}_x(L) = -\bar{P} = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\sum M_{B \text{点まわり}} = -\bar{M}_x - \bar{P} \frac{2L}{3} = 0 \implies v_B = \bar{M}_x(L) = -\bar{P} \frac{2L}{3} = \frac{PL^2}{2EI} \frac{2L}{3} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (7.20)$$

当然だが、これは、弾性曲線式による結果と一致している。

7.2.2 単純梁

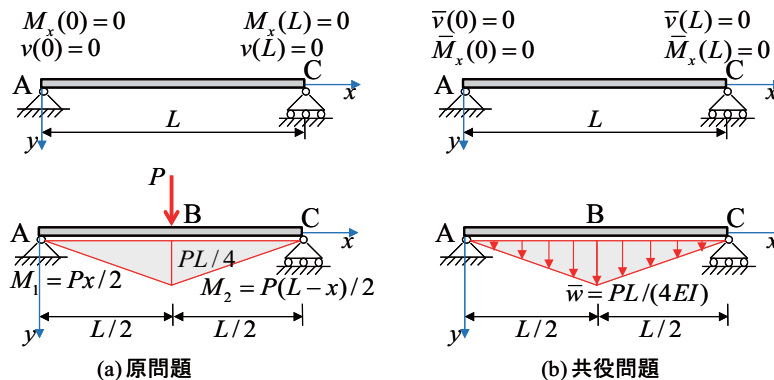


図 7.6 単純梁の変位を求めるための原問題と共役問題

図7.3の例題を考える。原問題と共役問題の解析モデルは対応関係によって以下のように変換する。

変位の境界条件	原問題	共役問題	
	$v(0) = 0$	\implies	$\bar{M}_x(0) = 0$
	$v(L) = 0$	\implies	$\bar{M}_x(L) = 0$
力の境界条件			
	$M_x(0) = 0$	\implies	$\bar{v}(0) = 0$
	$M_x(L) = 0$	\implies	$\bar{v}(L) = 0$
外力荷重			
$0 \leq x \leq L/2$	$M_1 = \frac{Px}{2}$	\implies	$\bar{w}_1 = \frac{Px}{2}$
$L/2 \leq x \leq L$	$M_2 = \frac{P(L-x)}{2}$	\implies	$\bar{w}_2 = \frac{P(L-x)}{2EI}$

したがって、共役問題の解析モデルは図7.6(b)のようになる。

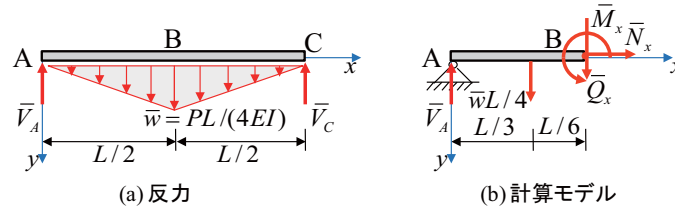


図 7.7 単純梁中央点の変形

原問題において中央点 B 点のたわみ $v_B = v(L/2)$ とたわみ角 $\theta_B = \theta(L/2)$ を求める問題は、図7.7に示すような共役問題において中央点 B 点の曲げモーメント $\bar{M}_x(L/2)$ とせん断力 $\bar{Q}_x(L/2)$ となる。ここで、曲げモーメントの正方向は、梁を y の正方向に膨らませるように定義されていることを注意してください。

反力の計算はここで省略するが、対称性を利用すれば

$$\bar{V}_A = \bar{V}_C = \frac{1}{2} \bar{w} \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI} \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{16EI} \quad (\uparrow) \quad (7.22)$$

となる。原問題の中央点のたわみとたわみ角は

$$\begin{aligned} \sum Y &= -\bar{V}_A + \bar{Q}_x + \frac{1}{2} \bar{w} \frac{L}{2} = 0 \\ \implies \theta_B &= \bar{Q}_x(L/2) = \bar{V}_A - \frac{\bar{w}L}{4} = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{PL^2}{16EI} = 0 \\ \sum M_{B \text{ 点まわり}} &= -\bar{M}_x + \bar{V}_A \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \bar{w} \frac{LL}{3} = 0 \\ \implies v_B = \bar{M}_x(L) &= \bar{V}_A \frac{L}{2} - \frac{\bar{w}LL}{4} = \frac{PL^2}{16EI} \frac{L}{2} - \frac{PL^2}{16EI} \frac{L}{6} = \frac{PL^3}{48EI} \end{aligned} \quad (7.23)$$

当然だが、これは、弾性曲線式による結果にも一致している。

7.2.3 張出梁とゲルバー梁

張出梁とゲルバー梁は、お互いにとって共役問題の解析モデルとなる。ここでは、具体的な計算問題を考えないが、張出梁およびゲルバー梁の共役問題における解析モデルは図7.8に示す。

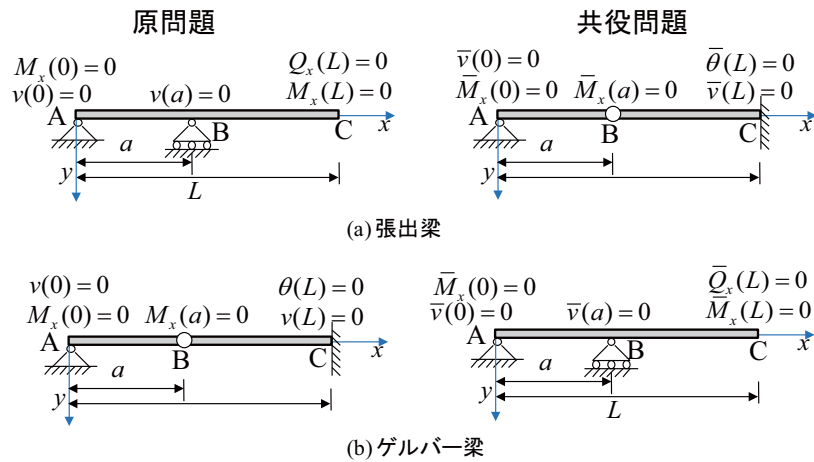


図 7.8 張出梁とゲルバー梁

7.3 仮想仕事法

仮想仕事法は、仮想仕事の原理に基づいた手法である。前述した弾性曲線式とモールの定理は、一般に梁のみを対象しているが、仮想仕事法は、任意の構造形式（梁、ラーメン構造、トラス）に適用できる手法である。また、仮想仕事の原理は、変形を求める問題以外にも、たくさんの構造工学問題（例えば、崩壊荷重を求める問題など）に適用されている。

7.3.1 仮想仕事の原理

仮想仕事法には、実系と仮想系があり、外力のなした仕事量の総和が、内力のなした仕事の総和に等しいというエネルギーの保存則が利用される。仮想仕事法の誘導詳細を省略するが、結果としては、以下のような関係式がある。

仮想仕事の原理：

$$\text{仮想荷重} \times \text{実変位} = \text{仮想荷重による断面力} \times \text{実変形}$$

これ以降は、仮想系の断面力および変位の記号の上にバーをつけることによって実系の断面力と区別する：

- 実系：外力 P ・モーメント M 、軸力 N ・せん断力 Q ・曲げモーメント M 、変位 v と変位角 θ
 - 仮想系：外力 \bar{P} ・モーメント \bar{M} 、軸力 \bar{N} ・せん断力 \bar{Q} ・曲げモーメント \bar{M} 、変位 \bar{v} と変位角 $\bar{\theta}$
- したがって、仮想仕事の原理による式は以下ようになる。

仮想仕事の式：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{P}_i v_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \theta_j &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \bar{N}_k \epsilon_k dx + \int_0^{L_k} \bar{M}_k \phi_k dx + \int_0^{L_k} \bar{Q}_k \gamma_k dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{Q}_k Q_k}{GA_k} dx \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

上式の中で、第一項は、仮想（系の）荷重 \bar{P}_i, \bar{M}_j かける仮想荷重の方向における実（系の）変位であり、第二・三項は、仮想系における荷重による断面力かける実系における変形である。第二項にひずみや曲率などの変形の項があり、使いにくいと、断面力しかない第三項は一般的に使われている。

さらに、仮想仕事法での仮想荷重は、任意に指定することができる。計算上便利なところと値をかければよい。普通は求めたい（実系の）変位に対応する場所・方向に大きさが1である荷重（変位の場合には集中力、回転角の場合にはモーメント）をかける。この場合の仮想仕事法は、単位荷重法とも呼ばれる。

単位荷重法の式：

$$\begin{aligned} 1 \cdot v &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{Q}_k Q_k}{GA_k} dx \right) \\ 1 \cdot \theta &= \sum_{k=1}^l \left(\int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx + \int_0^{L_k} \frac{\bar{Q}_k Q_k}{GA_k} dx \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

単位荷重法による建物の変形（変位・回転角）を求める計算手順は以下のようにまとめる。

単位荷重法の計算手順：

1. 各計算空間に対して、局所座標系を設定し、実問題の断面力分布を求める。
2. 変位（回転角）を求めたい場所に、仮定した変位（回転角）の正方向に大きさが1となる単位荷重をかけ、仮想問題とする。ここで、変位を求める問題では単位荷重は集中荷重となり、回転角を求めたい場合には単位荷重はモーメントとなる。
3. 上記1と同じ局所座標系を使い、上記2の仮想問題に対して、断面力分布を求める。
4. 式(7.25)を適用し、変位または回転角を求める。

7.3.2 単位荷重法によるトラス構造の変形

トラス構造の場合には、曲げモーメントもせん断力もゼロであり、一つの部材における軸力はどこでも同じなので、節点変位を求めるには、以下の式となる。

単位荷重法によるトラス構造の変形：

$$1 \cdot v = \sum_{k=1}^m \int_0^{L_k} \frac{\bar{N}_k N_k}{EA_k} dx = \sum_{k=1}^m \frac{\bar{N}_k N_k L_k}{EA_k} \quad (7.26)$$

ここで、 m は部材の数である。

例えば、図7.9(a)に示すトラス構造に対して、節点Eの水平方向の変位を求める問題を考える。

例 7.3. 図7.9(a)に示すトラス構造に対して、節点Eの水平方向の変位を求めてください。ただし、各部材の軸剛性を同じように EA とする。

節点Eの水平方向の変位を求めたいため、対応する仮想問題としては、図7.9(b)に示す節点Eの水平方向に右向きに単位仮想荷重（集中力）が作用する問題となる。

実問題における各部材の軸力 N_k はすでに第4章で計算され、式(7.27)にまとめられる。また、途中結果が省略するが、仮想問題における各部材の軸力 \bar{N}_k も式(7.27)にまとめる。

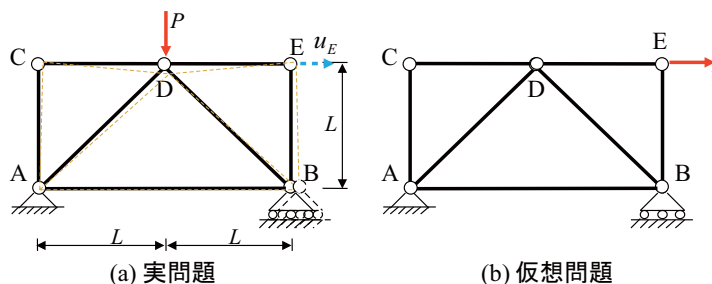


図 7.9 トラス構造の節点変位

部材	N_k	\bar{N}_k	L_k	$\frac{N_k \bar{N}_k L_k}{EA}$
AB	$P/2$	$1/2$	$2L$	$PL/(2EA)$
AC	0	0	L	0
AD	$-\sqrt{2}P/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}PL/(2EA)$
BD	$-\sqrt{2}P/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}PL/(2EA)$
BE	0	0	L	0
CD	0	0	L	0
DE	0	1	L	0
合計($u_E =$)				$PL/(2EA)$

(7.27)

7.3.3 単位荷重法による梁の変形

梁の場合は、軸力およびせん断力による変形は小さいため、無視されることが多い。したがって、仮想仕事法（単位荷重法）の式は以下のように簡略化できる。

単位荷重法による梁の変形：

$$1 \cdot v = \sum_{k=1}^l \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx$$

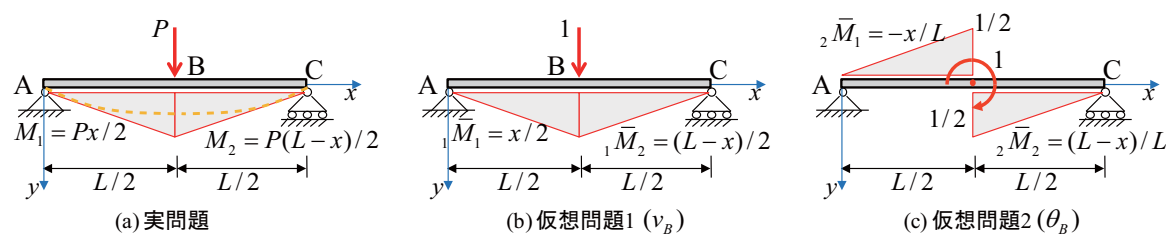
$$1 \cdot \theta = \sum_{k=1}^l \int_0^{L_k} \frac{\bar{M}_k M_k}{EI_k} dx \tag{7.28}$$


図 7.10 単純梁中央点のたわみ

例題としては、前節でも計算した図7.10に示す単純梁中央点 B のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求める（実）問題を考える。

例 7.4. 単位荷重法を用いて、図7.10 に示す単純梁中央点 B のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求めてください。

(実系において) B 点のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求めたいので、仮想問題としては下記の二つがある。

- 仮想問題 1: 単位荷重法を用いて、たわみ v_B を求めるため、B 点に下向き (たわみの正方向) の単位 (仮想) 集中荷重を作用する問題
- 仮想問題 2: 単位荷重法を用いて、たわみ角 θ_B を求めるため、B 点に時計回りの単位 (仮想) モーメント荷重を作用する問題

上記の二つの仮想問題に対して、それぞれの曲げモーメントを求め、実系の曲げモーメント分布とそれぞれ計算することによって B 点のたわみ v_B とたわみ角 θ_B を求める。

実問題と仮想問題における曲げモーメントの分布は、

$$\begin{aligned}
 \text{実問題: } & 0 \leq x \leq L/2 & M_1 &= Px/2 \\
 & L/2 \leq x \leq L & M_2 &= P(L-x)/2 \\
 \text{仮想問題 1: } & 0 \leq x \leq L/2 & {}_1\bar{M}_1 &= x/2 \\
 & L/2 \leq x \leq L & {}_1\bar{M}_2 &= (L-x)/2 \\
 \text{仮想問題 2: } & 0 \leq x \leq L/2 & {}_2\bar{M}_1 &= -x/L \\
 & L/2 \leq x \leq L & {}_2\bar{M}_2 &= (L-x)/L
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

となる。式 (7.28) を適用すれば、仮想問題 1 と実問題によって v_B を求める：

$$\begin{aligned}
 v_B = 1 \cdot v_B &= \int_0^{L/2} \frac{{}_1\bar{M}_1 M_1}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{{}_1\bar{M}_2 M_2}{EI} dx \\
 &= \int_0^{L/2} \frac{Px^2}{4EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{P(L-x)^2}{4EI} dx \\
 &= \left[\frac{Px^3}{12EI} \right]_0^{L/2} + \left[\frac{P(L^2x - Lx^2 + x^3/3)}{4EI} \right]_{L/2}^L \\
 &= \frac{PL^3}{48EI}
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

また、仮想問題 2 と実問題によって θ_B を求める：

$$\begin{aligned}
 \theta_B = 1 \cdot \theta_B &= \int_0^{L/2} \frac{{}_2\bar{M}_1 M_1}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{{}_2\bar{M}_2 M_2}{EI} dx \\
 &= \int_0^{L/2} \frac{-Px^2}{2EIL} dx + \int_{L/2}^L \frac{P(L-x)^2}{2EIL} dx \\
 &= \left[\frac{-Px^3}{6EIL} \right]_0^{L/2} + \left[\frac{P(L^2x - Lx^2 + x^3/3)}{2EIL} \right]_{L/2}^L \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

となり、前節の弾性曲線式およびモールの定理による結果と一致する。

単位荷重法による梁 (ラーメン構造にも適用) の変形を求めるには、以下のことを注意してほしい。

単位荷重法の注意点：

1. 仮想荷重の方向は、変位の正方向にかける。
2. 実問題でも仮想問題でも曲げモーメントの (仮定した) 正方向が同じにすれば、弾性曲線式のように、変位の正方向に合わせて曲げモーメントの正方向を定める必要がない。

3. 実問題の曲げモーメント分布と仮想問題の曲げモーメント分布の式によって、積分空間をさらに再分割される場合がある。

7.3.4 単位荷重法によるラーメン構造の変形

梁と同じように、ラーメン構造には曲げ（モーメントによる）変形が支配となり、せん断力および軸力による変形の量を無視されることが多い。²したがって、ラーメン構造の変形も式(7.28)を適用することができる。ラーメン構造の場合も、実系と仮想系との各計算空間における曲げモーメントの積と曲げ剛性 (EI) の比を積分した総和で計算できる。

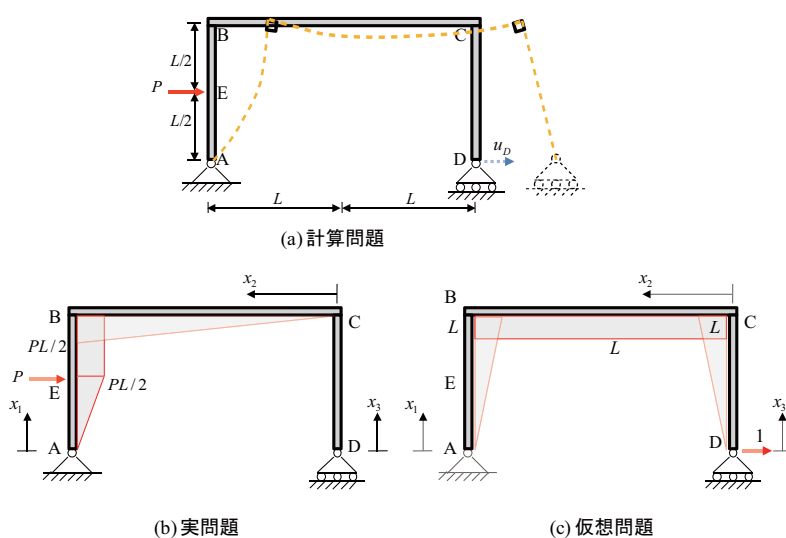


図 7.11 静定ラーメン構造の変位

静定ラーメン構造の例題としては、図7.11(a)のD点の水平変位 u_D を求める問題を考える。

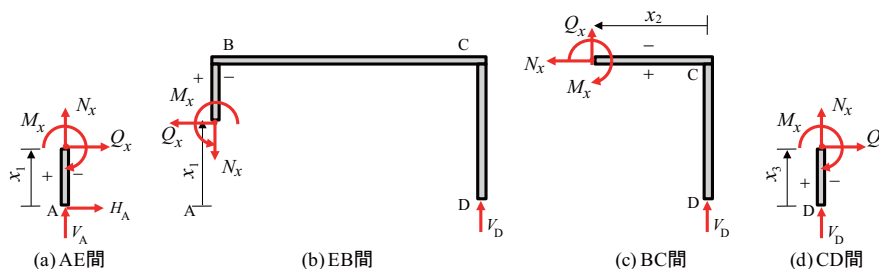


図 7.12 曲げモーメント正方向の定義

² これはあくまでも中小規模の建物に近似的に満たされるもので、超高層ビルなど超大規模の構造物には特に軸力による変形が無視できない場合がある。

例 7.5. 図7.11(a)の D 点の水平変位 u_D を求めてください。ただし、各部材の曲げ剛性を同じ値とし、 EI とする。

D 点の水平変位を求めたいため、D 点に右向きに水平単位仮想荷重をかける。実問題と仮想(単位荷重)問題における曲げモーメントの分布図および局所座標系は、それぞれ図7.11(b)と(c)に示す。

各計算空間の曲げモーメントの正方向は、図7.12に示すように採用する。また、各計算空間に対して、曲げモーメントによって引張側を +、圧縮側を - とする。途中結果を省略するが、実問題と仮想問題の各計算空間における曲げモーメントの式は下記のようにまとめる。

区間	実問題	仮想問題
AE 間($0 \leq x_1 \leq L/2$)	$M_{x_1} = -Px_1$	$\bar{M}_{x_1} = -x_1$
EB 間($L/2 < x_1 \leq L$)	$M_{x_1} = -PL/2$	$\bar{M}_{x_1} = -x_1$
BC 間($0 \leq x_2 \leq 2L$)	$M_{x_2} = Px_2/4$	$\bar{M}_{x_2} = L$
CD 間($0 \leq x_3 \leq L$)	$M_{x_3} = 0$	$\bar{M}_{x_3} = x_3$

(7.32)

したがって、D 点の水平変位 u_D は以下のように仮想仕事法を用いて計算できる。

$$\begin{aligned}
 u_D = 1 \cdot u_D &= \int_0^{L/2} \frac{(-Px_1)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_{L/2}^L \frac{(-PL/2)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{2L} \frac{(Px_2/4)(L)}{EI} dx_2 + \int_0^L \frac{(0)(x_3)}{EI} dx_3 \\
 &= \left[\frac{Px_1^3}{3EI} \right]_0^{L/2} + \left[\frac{PLx_1^2}{4EI} \right]_{L/2}^L + \left[\frac{PLx_2^2}{8EI} \right]_0^{2L} + 0 = \frac{35PL^3}{48EI}
 \end{aligned}
 \tag{7.33}$$

ここで、変位は正であるというのは、仮定した右向きの変位となることを意味する。

ラーメン構造に仮想仕事法を適用した場合に、梁の変形計算に対する注意点と同じだが、実問題および仮想問題において、各計算空間の局所座標系および曲げモーメントの正方向は同じものを採用する必要がある。

7.4 宿題

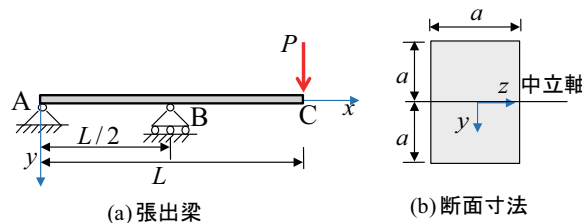


図 7.13 弾性曲線式の宿題：張出梁の変形と断面設計

Exercise 7.1. 図7.13(a)に示す張出梁に対して、以下の問を教えてください。

- 弾性曲線式を使って、C 点のたわみ角およびたわみを求めてください。
- モールの定理によって、C 点のたわみ角およびたわみを求めてください(オプション)。
- C 点の最大変位を v_{\max} とした場合、図7.13(b)に示す断面に対して、必要最低限の幅 a を求めてください。

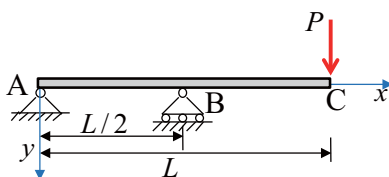


図 7.14 単位荷重法による張出梁の変形計算

Exercise 7.2. 図7.14に示す張出梁に対して、

1. 単位荷重法により、C点のたわみ v_C (鉛直方向変位) およびたわみ角 θ_C を求めてください。
2. 梁全体の変形図を描いてください。
3. C点の最大変位を v_{\max} とした場合、図7.13(b)に示す断面に対して、必要最低限の幅 a を求めてください。

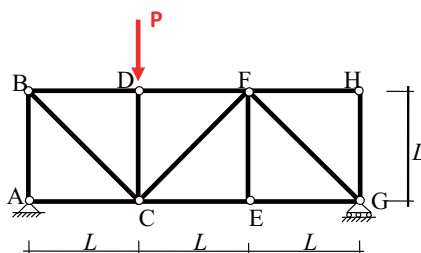


図 7.15 単位荷重法によるトラス構造の変形計算

Exercise 7.3. 図7.15に示すトラス構造に対して、

1. 単位荷重法を用いて、E点のたわみ v_E (鉛直方向変位) を求めてください。
2. トラス構造全体の変形図を描いてください。
3. E点の最大変位を v_{\max} 、各部材の断面剛性を EA とした場合に、必要最低限の断面剛性 EA を求めてください。

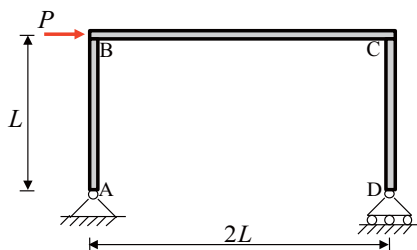


図 7.16 単位荷重法によるトラス構造の変形計算

Exercise 7.4. 図7.16に示すラーメン構造に対して、

1. 単位荷重法を用いて、D点の水平変位およびおおよび回転角 θ_D を求めてください。

2. ラーメン構造全体の変形図を描いてください。
3. D 点の最大変位を v_{\max} とした場合、図7.13(b) に示す断面に対して、必要最低限の幅 a を求めてください。