

Chapter 6 応力と断面性質

Abstract 本章では、断面に生じる応力の定義と求め方、更に断面の各性質および応力を使った構造設計法の基本について説明する。

6.1 応力とひずみ

いままでの内容は、断面の形状を無視し（直線に簡略し）、断面全体にわたっての力の総和（断面力）を求めてきた。しかし、構造物の破壊は、部材（の断面）が一気に壊れるのではなく、断面において最も危ないところ（局所）から始まる。断面力は断面全体の力状況を反映するので、部材の安全性を検討するのに、情報は不足であり、断面の局所における力の状況を反映できる応力で検討する必要がある。

応力 (Stress) とは、微小面積に作用する単位面積当たりの力を表すものである。また、応力に対応している微小面積における変形を表すものはひずみ (歪・Strain) である。

6.1.1 応力

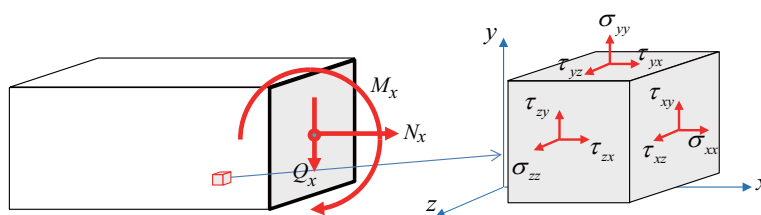


図 6.1 構造物の微小部分における応力

図6.1では、部材の中から仮想的に切り出された微小の部分（立方体）における応力を示している。応力は大きく分けると、下記の二種類がある。

応力の種類

- 垂直応力 (Normal Stress, σ) : 切断面に垂直する応力。
- せん断応力 (Shear Stress, τ) : 切断面内にある応力であり、面内には直交する二つのせん断応力がある。

あわせて、立方体に作用している応力は以下の六つの独立成分がある。

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \quad (6.1)$$

ここで証明が省略するが、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ という関係式が分かっている。

応力には、正負という方向性を持つが、その大きさを表す場合には応力度というものが使われている。要するに、応力度は応力の絶対値である。

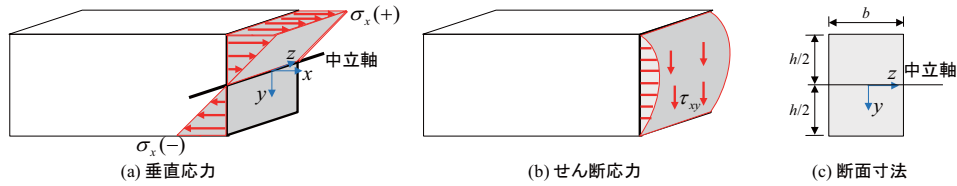


図 6.2 梁の切断面における応力分布

断面力は、実はこれらの応力の断面全体にわたる力（モーメント）の総和である。例えば、図6.2は梁の断面における応力分布を示している。（ここで、局所座標系の正方向を注意してください。後で曲げモーメントによる垂直応力および梁の変形の定式化のため、下向きを y -軸の正方向としている。）梁断面の上半分は引張側（垂直応力は正）で、下半分は圧縮側（垂直応力は負）である。その境目にあるのは、中立軸 (Neutral Axis) である。したがって、中立軸においては、垂直応力はゼロである。後で理由を説明するが、垂直応力の分布は線形的な関係となっている。

断面力 N_x, Q_x, M_x と垂直応力 σ_x （または簡単に σ ）およびせん断応力 τ_{xy} （または τ ）の関係は、下記の式で表すことができる。

$$\begin{aligned} N_x &= \sum \sigma \Delta A = \int \sigma dA (= \iint \sigma dz dy) \\ M_x &= \sum (\sigma \Delta A) y = \int \sigma y dA (= \iint \sigma y dz dy) \\ Q_x &= \sum \tau \Delta A = \int \tau dA (= \iint \tau dz dy) \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで、中立軸よりの距離を y とする。上記の式からでも分かるように、垂直応力 σ は軸力と曲げモーメント M_x によるものであり、せん断応力 τ はせん断力 Q_x によるものである。

6.1.2 ひずみ

ひずみ (Strain) は変形の比率を表すもので、単位長さあたり変形の量で定義される。ひずみも二種類で、それぞれ応力に対応して垂直ひずみ ε とせん断ひずみ γ がある。

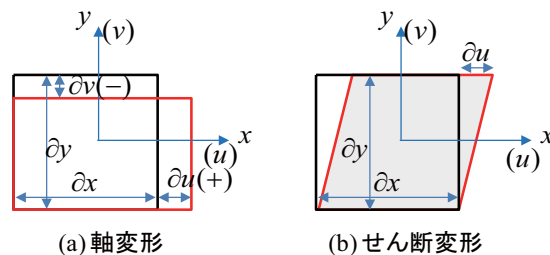


図 6.3 断片の変形

構造の断片の変形 (Deformation) は図6.3に示す。垂直ひずみ ($\varepsilon_x, \varepsilon_y$) とせん断ひずみ (γ) はそれぞれ以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (6.3)$$

ここで、 u と v はそれぞれ x -, y -方向の変位である。

両方向の垂直ひずみの間に、材料によってその比が大体決められている。この比は、ポアソン比 ν (Poisson's Ratio) と呼び、以下のように定義する。

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\quad (6.4)$$

ここで、マイナスが付いていることを注意してください。鋼材 (鉄) の場合は 0.3、コンクリートの場合は 0.18~0.2 ぐらいである。

応力とひずみの間には、以下のような線形的関係がある。

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon \\ \tau &= G\gamma\end{aligned}\quad (6.5)$$

ここで、 E はヤング係数 (Young's Modulus) で、 G はせん断弾性係数 (Shear Modulus) である。

実は、この式はフックの法則 $f = kx$ と似ている。 E と G はバネ定数 k に対応し、材料の「変形しにくさ」(バネの硬さ) を表すものである。鉄の場合、 $E_s = 205\text{kN/mm}^2$ で、コンクリートはその 1/10 程度で、 $E_c = 18 \sim 20\text{kN/mm}^2$ である。

証明は省略するが、 E と G の間には、ポアソン比 ν を経由して以下の関係式がある。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\quad (6.6)$$

6.1.3 モールの応力円

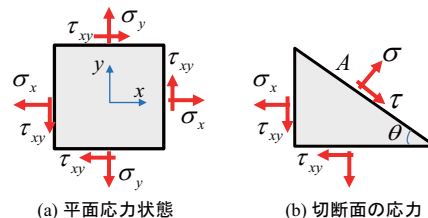


図 6.4 平面応力状態における応力分布

モールの応力円 (Mohr's stress circle) とは、物体内の応力状態を図示するときに現れる円である。

平面応力状態において、局所的に働いている垂直応力 σ_x, σ_y およびせん断応力 τ_{xy} は図 6.4(a) に示す。その一部分を (b) のように切断すると、切断面における垂直応力 σ とせん断応力 τ が表に出てくる。

切断面における垂直応力 σ とせん断応力 τ に対して、 x, y 方向の釣合い方程式は以下になる。

$$\begin{aligned}\sum X &= (A\sigma) \sin \theta + (A\tau) \cos \theta - \sigma_x (A \sin \theta) - \tau_{xy} (A \cos \theta) = 0 \\ \sum Y &= (A\sigma) \cos \theta - (A\tau) \sin \theta - \sigma_y (A \cos \theta) - \tau_{xy} (A \sin \theta) = 0\end{aligned}\quad (6.7)$$

ここで、 A は切断面の面積である。上の式を整理すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma \sin \theta + \tau \cos \theta &= \sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \\ \sigma \cos \theta - \tau \sin \theta &= \sigma_y \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta\end{aligned}\quad (6.8)$$

さらに、上の一番目の式に $\sin \theta$ を掛けたものが、二番目の式に $\cos \theta$ を掛けたものを足すと、 σ が求められる。また、一番目の式に $\cos \theta$ を掛けたものが、二番目の式に $\sin \theta$ を掛けたものを引くと、 τ が求められる。その結果は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau &= \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (6.9)$$

ここで、以下の三角関数を利用した。

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\end{aligned}\quad (6.10)$$

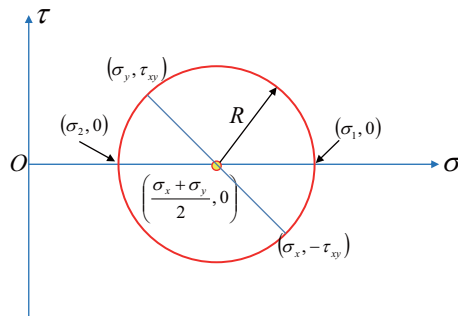


図 6.5 モールの応力円

式 (6.9) の二つの式の二乗和は以下の円に関する方程式としてまとめられる。

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 = R^2\quad (6.11)$$

式 (6.11) で定義された円の中心は $((\sigma_x + \sigma_y)/2, 0)$ にあり、その半径 R は $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2}$ となる。その円はモールの応力円と呼ばれ、図 6.5 にその形状を示す。

また、最大と最小の応力は $\sigma_{1,2}$ はそれぞれ以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R\end{aligned}\quad (6.12)$$

この時のせん断応力はゼロとなり、 $\sigma_{1,2}$ は主応力とも呼ばれる。また、せん断応力の最大値は R であり、その時の垂直応力は $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ である。

鉄筋コンクリート造の建物には、引張応力が鉄筋で負担しているため、主応力の方向に沿って鉄筋を配置する必要がある。そのため、(最大)主応力の分布を求めるのは重要となる。

6.2 構造設計の基本

6.2.1 材料強度

材料強度とは、材料が破壊するまでにどのぐらいの応力を耐えられるかという指標である。普通は、圧縮か引張実験でその材料強度を決める。

鉄の場合には、いろいろ種類があるが、引張強度も圧縮強度も大体 $400 \sim 570 \text{N/mm}^2$ ぐらいで、コンクリートの圧縮強度は $15 \sim 27 \text{N/mm}^2$ 程度であり、その引張強度は圧縮強度の $1/10$ ぐらいで、実際の構造設計では無視されることが多い。

6.2.2 構造設計の理念（一次設計）

構造設計にはいくつかの理念の異なる設計法があるが、基本的な考え方としては、構造物の内部に生じる最大（垂直・せん断）応力度 $|\sigma|_{\max}, |\tau|_{\max}$ は許容（許される）応力度 $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ を超えないこと（いわゆる許容応力度設計法¹）である。ようするに、以下の式で構造物の設計は設計要求を満足するかどうかを判断する。

$$\begin{aligned}|\sigma|_{\max} &\leq \bar{\sigma} \\ |\tau|_{\max} &\leq \bar{\tau}\end{aligned}\quad (6.13)$$

許容応力度は、材料の基準強度（鉄は降伏強度、コンクリートは圧縮強度）を安全率の比で決められる。詳細については、3年生前期の「建築構造計画学」で詳しく説明する。

6.3 断面力と応力

6.3.1 軸力による垂直応力

トラス構造の部材には、曲げモーメントとせん断力もゼロであるため、そのせん断応力はゼロ ($\tau = 0$)、切断面における垂直応力はどこでも一緒なので、軸力は

$$N_x = \sum \sigma \Delta A = \int \sigma dA = \sigma \int dA = \sigma A \quad (6.14)$$

となる。ここで、 A は部材の断面積である。

¹ 一次設計（許容応力度設計）においては中小規模の地震に対応し、構造物には損傷が生じないことは設計指標となる。それに対して、二次設計（終局耐力設計）においては大規模の地震に対応し、構造物には損傷があってもいいが、倒壊しないことは設計指標となる。

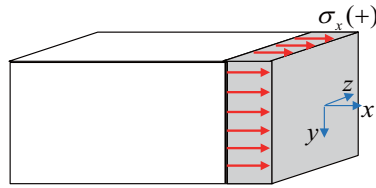


図 6.6 トラスの切断面における応力分布

したがって、軸力による垂直応力は

$$\sigma = \frac{N_x}{A} \quad (6.15)$$

で計算できる。

6.3.2 曲げモーメントによる垂直応力

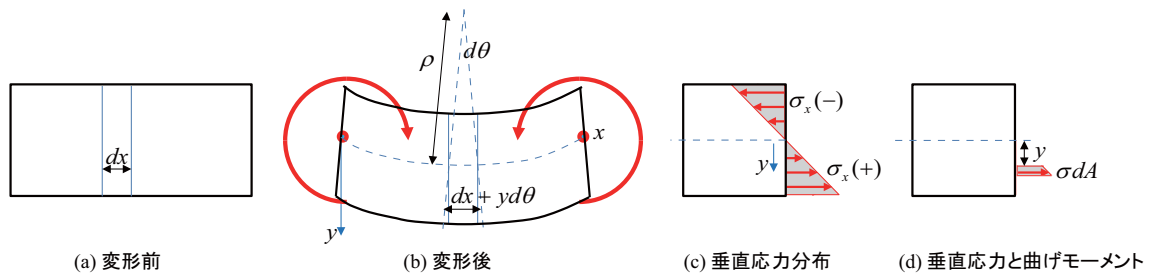


図 6.7 曲げモーメントによる垂直応力

曲げモーメントと垂直応力との関係は自明ではないが、平面保持の仮定を採用することによって、何らかの式で表すことができる。平面保持というのは、曲げによる変形前後において切断面は平面を保持することである。

例えば、図6.7に示す曲げモーメントのみを受ける梁を考える。平面保持の仮定により、変形前に材軸方向と直交する方向の直線は、変形後も直線となっている。伸び縮みのない中立軸より距離 y においては、変形前の長さ dx は、変形後の $dx + yd\theta$ となる。したがって、切断面における垂直ひずみ ε_y (簡単のため以下は ε とする) は

$$\varepsilon = \frac{(dx + yd\theta) - dx}{dx} = \frac{d\theta}{dx}y = \phi y \quad (6.16)$$

となる。ここで、 ϕ は、角度の変化率を表す曲率である。ちなみに、曲率半径 ρ は曲率の逆数である。

$$\rho = \frac{1}{\phi} \quad (6.17)$$

中立軸より y の距離における垂直応力は、

$$\sigma = E\varepsilon = E\phi y \quad (6.18)$$

で書ける。上の式によると、曲げによる垂直応力分布は、垂直ひずみと同じように、中立軸よりの距離と線形的な関係を持つ。その分布は、図6.7(c)に示す。ようするに、中立軸では、垂直ひずみも垂直応力もゼロである。

また、同じ切断面において、曲率は不変であるため、中立軸まわりのモーメントは

$$M = \int \sigma_y dA = \int E \phi y^2 dA = E \phi \int y^2 dA = E \phi I_z \quad (6.19)$$

で書ける。ここで、 I_z は断面性質を表す指標の一つ、 z -軸まわりの断面二次モーメントである。詳細は次節に説明する。

したがって、垂直応力と曲げモーメントの関係式は下記のように、中立軸よりの距離 y および断面二次モーメント I_z で書ける。

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y \quad (6.20)$$

ここで、注意してほしいのは、 y は正の場合には引張応力となり、負の場合には圧縮応力となる。

同じ断面において、最大の垂直応力（度）は中立軸より最も遠いところに発生するため、

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} = \frac{M}{Z} \quad (6.21)$$

となる。ここで、 $Z = I_z / y_{\max}$ は断面係数と呼ぶ。さらに、曲げモーメントにより最大の垂直応力（度） $|\sigma|_{\max}$ は、

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} \quad (6.22)$$

で計算できる。これは、構造設計法の一つである許容応力度設計法²において重要な式となっている。

6.3.3 複合効果による垂直応力

前述したように、軸力よりも曲げモーメントよりも垂直応力が生じるので、軸力と曲げモーメントを同時に受ける場合（例えば柱）に、その垂直応力はそれぞれによる垂直応力の総和で計算できる。

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{Z} \quad (6.23)$$

ここで、曲げモーメントによる垂直応力は正も負も存在することを注意し、結局最大応力（度）はその絶対値の最大値となる。

6.3.4 セン断応力

せん断応力を定式化するために、図6.8の微小長さ dx の断片を考える。中立軸より下端と上端までの距離をそれぞれ y_1, y_2 、断面奥方向の幅を b_y 、その断面積を A_y とする。さらに、断片を水平方向に切断すると、図6.8(c)となり、せん断応力と垂直応力の水平方向における釣合い方程式は

² 一次設計法および弾性設計法とも呼ばれている

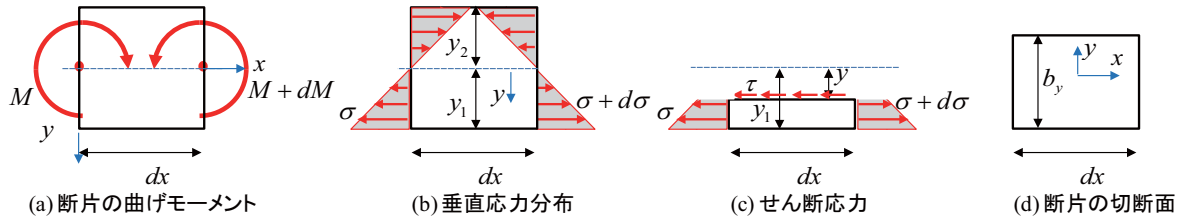


図 6.8 セン断応力

$$-\int_y^{y_1} \sigma dA - \tau A_y + \int_y^{y_2} (\sigma + d\sigma) dA = -\int_y^{y_1} \frac{M}{I} y dA - \tau A_y + \int_y^{y_2} \frac{M + dM}{I} y dA = \int_y^{y_1} \frac{dM}{I} y dA - \tau A_y = 0 \quad (6.24)$$

したがって、せん断応力度は

$$\tau = \frac{\int_y^{y_1} \frac{dM}{I} y dA}{A_y} = \frac{\int_y^{y_1} \frac{dM}{I} y dA}{dx b_y} = \frac{Q}{I b_y} \int_y^{y_1} y dA = \frac{Q S_y}{I b_y} \quad (6.25)$$

となる。ここで、 $\frac{dM}{dx} = Q$ の関係式が使われた（式 (5.20) において仮定した曲げモーメントの正方向と逆であることを注意してください）。また、 S_y は y より端部までの断面 1 次モーメントである。

中立軸より上半分のせん断応力を計算する場合に、積分範囲を y_2 に直せば、同じように書ける。

$$\tau = \frac{Q}{I b_y} \int_y^{y_2} y dA \quad (6.26)$$

これらの式によると、縁（断面の端部）においては、 $y = y_1$ で積分範囲はゼロであるため、せん断応力はゼロ、中立軸においては積分範囲は最大となるため、せん断応力も最大となることが分かる。その分布は図 6.2(b) に示す。

6.4 断面性質

前節では、断面力（軸力、曲げモーメントおよびせん断力）による（垂直・せん断）応力を定式化した。その定式に出てきた断面の一次モーメント S_y 、二次モーメント I および主軸を決めるための相乗モーメントなどの断面性質をこの節で説明する。

断面 n 次モーメントとは、ある面積 A を持つ断面のある軸³に対して、一般的に以下のように定義できる。

$$I^n = \int_A y^n dA \quad (6.27)$$

ここで、 y は対象軸よりの距離である。特に、断面一次モーメント ($n = 1$ 、First Moment of Area) を S 、断面二次モーメント ($n = 2$ 、Second Moment of Area) を I で表す。

6.4.1 図心と断面一次モーメント

後ほど述べるように、図心と断面一次モーメントとの間には一定の関係が成り立つ。

図心とは、図形の中心であり、図形の重心とも呼ばれる。したがって、図形に作用する重力（分布荷重）は、図心にかかる集中力と考えるため、分布荷重を集中荷重に変換するには、第二章で習ったパリニオンの定理が適用する。

³ 断面二次モーメントを計算する際、普通は中立軸を対象軸とする。

6.4.1.1 定式化

図心（重心）の座標 (x_0, y_0) を求めるには、集中荷重による x - y 軸まわりのモーメントと図形のすべての微小面積 dA による同じ軸まわりのモーメントは一致する。

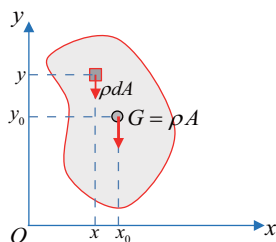


図 6.9 図心または重心の (x_0, y_0) の計算

図 6.9 に示すように、等価の集中荷重 G の y -軸まわりのモーメントは

$$Gx_0 = \left(\int_A \rho dA \right) x_0 = A\rho x_0 \quad (6.28)$$

である。ここで、 x_0 は集中荷重 G の y -軸までの距離であり、実は x -方向の座標である。また、 ρ は単位面積あたりの重さを表す「密度」みたいなものとし、図形は一様な密度を持つと仮定する。

図 6.9 おいて、微小面積 dA による y -軸まわりのモーメントは $(\rho dA)x$ であるため、すべての微小面積による y -軸まわりのモーメントは

$$\int_A (\rho dA)x = \rho \int_A x dA \quad (6.29)$$

である。

上記の二つの式は等しいため、変換された集中荷重（図心） G の x -座標 x_0

$$x_0 = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A} \quad (6.30)$$

である。

同様に、 x -軸まわりのモーメントの等価式によって、図心の y -方向の座標 y_0 を以下のように定式化できる。

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A} \quad (6.31)$$

上記の図心の定義式の中では、 S_x と S_y はそれぞれ x -軸および y -軸まわりの断面一次モーメントであり、その式によると、対象軸は図心を通るとき、それに対応する断面一次モーメントはゼロとなることが分かる。

6.4.1.2 直角四辺形の図心

例えば、図 6.10(a) の直角四辺形の図心を求めてみる。規則的な図形なので、「直感」的にもわかるように、図の座標系においては図心の位置は $(b/2, h/2)$ にあり、以下はそれ y -方向の座標 y_0 の計算を例として証明する。図 6.10(b) に示すように、図形の x -軸まわりの一次モーメント S_x と断面積 A は

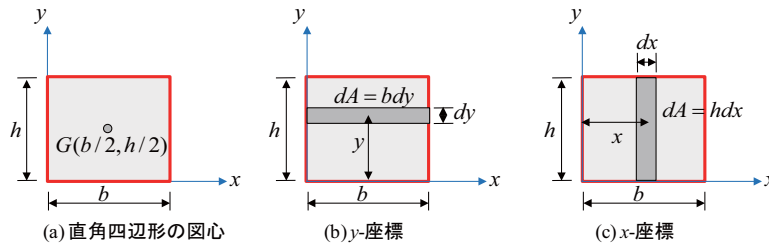


図 6.10 断面一次モーメントと図心：直角四辺形

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y(b dy) = \frac{b}{2} y^2 \Big|_0^h = \frac{bh^2}{2}$$

$$A = \int_A dA = \int_0^h (b dy) = by \Big|_0^h = bh \quad (6.32)$$

となり、図心の y -座標は

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2/2}{bh} = h/2 \quad (6.33)$$

となる。同じように、図心の x -座標も図6.10(c) を使って、以下のように求めることができる。

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_0^b x(h dx)}{bh} = \frac{b^2 h/2}{bh} = b/2 \quad (6.34)$$

6.4.1.3 直角三角形の図心

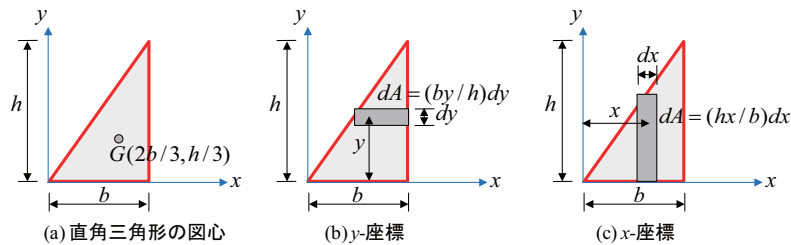


図 6.11 断面一次モーメントと図心：直角三角形

次は、図6.11(a) の直角三角形を計算する。図6.10(b) に示すように、図形の x -軸まわりの一次モーメント S_x と断面積 A は

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y[b(h-y)/h dy] = \frac{b}{h} (hy^2/2 - y^3/3) \Big|_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

$$A = \int_A dA = \int_0^h \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b}{h} (hy - y^2/2) \Big|_0^h = \frac{bh}{2} \quad (6.35)$$

となり、図心の y -座標は

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2/6}{bh/2} = h/3 \quad (6.36)$$

となる。同じように、図心の x -座標も図6.11(c) を使って、以下のように求めることができる。

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_0^b x(hx/b) dx}{bh/2} = \frac{b^2 h/3}{bh/2} = 2b/3 \quad (6.37)$$

実は、直角三角形の図心計算式は前に出てきたように、三角形のような等変分布荷重を集中荷重に変換する際、その作用点の計算のところではすでに暗黙的に使っていた。

6.4.1.4 円形の図心

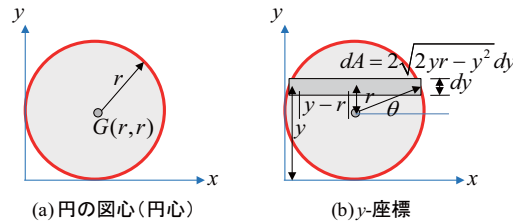


図 6.12 断面一次モーメントと図心：円形

円形の図心を計算するのに、結果は簡単だが（例えば図6.12(a)の場合は (r, r) ）、途中結果は少し複雑である。例えば、 y -座標は以下のように求めることができる。

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_0^{2r} y(2\sqrt{2yr - y^2}) dy}{\pi r^2} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r + r \sin \theta)(2r \cos \theta)(r \cos \theta d\theta)}{\pi r^2} = \frac{\pi r^3 / 2}{\pi r^2} = \frac{r}{2} \quad (6.38)$$

ここで、

$$\begin{aligned} y &= r(1 + \sin \theta) \\ dy &= d[r(1 + \sin \theta)] = r \cos \theta d\theta \\ \cos^2 \theta &= (\cos 2\theta + 1) / 2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

などが利用された。 x -座標 $x_0 = r$ も同じように求めることができる。

6.4.1.5 複合図形の図心

台形などより複雑な図形の場合に、前述の方法でも計算できるが、計算はややこしくなってしまう。直角四辺形や直角三角形のような単純図形に分解できる場合に、以下のように、計算をより楽にする方法がある。

複合図形を単純図形に分解し、単純図形の面積および図心を利用して、その図心は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_i A_i y_{0i}}{\sum_i A_i} \\ x_0 &= \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i A_i x_{0i}}{\sum_i A_i} \end{aligned} \quad (6.40)$$

これは、前述した積分の方法と本質的には同じである。

実は、複合図形を構築するには、普通のプラスと正反対のマイナスの考え方があ

例 6.1. プラスの考え方によって、図6.13(a)の台形の図心を計算してください。

図6.13(a)の台形は、図(b)に示すように直角四辺形 a プラス直角三角形 b で作られる。

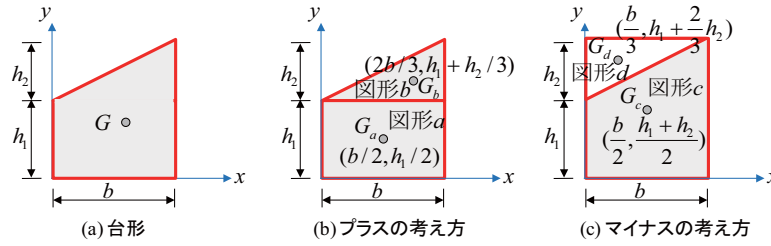


図 6.13 複合図形の断面一次モーメントと図心：台形

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{S_x}{A} = \frac{A_a y_a + A_b y_b}{A_a + A_b} = \frac{(bh_1)(h_1/2) + (bh_2/2)(h_1 + h_2/3)}{bh_1 + bh_2/2} = \frac{3h_1^2 + 3h_1h_2 + h_2^2}{6h_1 + 3h_2} \\
 x_0 &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_a x_a + A_b x_b}{A_a + A_b} = \frac{(bh_1)(b/2) + (bh_2/2)(2b/3)}{bh_1 + bh_2/2} = \frac{3bh_1 + bh_2}{6h_1 + 3h_2} \quad (6.41)
 \end{aligned}$$

例 6.2. マイナスの考え方によって、図6.13(a)の台形の図心を計算してください。

図6.13(a)の台形は、図(c)のような大きな直角四辺形 c プラス負の直角三角形 d で作られる。

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{S_x}{A} = \frac{A_c y_c + (-A_d) y_d}{A_c + (-A_d)} = \frac{b(h_1 + h_2)[(h_1 + h_2)/2] + (-bh_2/2)(h_1 + 2h_2/3)}{b(h_1 + h_2) + (-bh_2/2)} = \frac{3h_1^2 + 3h_1h_2 + h_2^2}{6h_1 + 3h_2} \\
 x_0 &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_c x_c + (-A_d) x_d}{A_c + A_d} = \frac{b(h_1 + h_2)(b/2) + (-bh_2/2)(2b/3)}{b(h_1 + h_2) + (-bh_2/2)} = \frac{3bh_1 + bh_2}{6h_1 + 3h_2} \quad (6.42)
 \end{aligned}$$

当然だが、どっちの方法でも同じ結果になっていることが分かる。

6.4.2 断面二次モーメントと断面係数

断面二次モーメント I は以下のように定義される。

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (6.43)$$

6.4.2.1 中立軸と図心

曲げモーメントのみを受ける場合に、断面における軸力はゼロであるため、以下の

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E \phi y dA = E \phi \int_A y dA = E \phi S_x = 0 \quad (6.44)$$

が成り立つ。ここで、 y は中立軸からの距離を表し、 ϕ は前に説明したように部材の断面において回転角の変化率を表す曲率である。ヤング係数 E 、モーメントによる曲率 ϕ はゼロでないため、断面一次モーメント S_x はゼロとなる。したがって、曲げモーメントのみを受ける場合に、中立軸は図心にあることが分かる。

6.4.2.2 直角四辺形

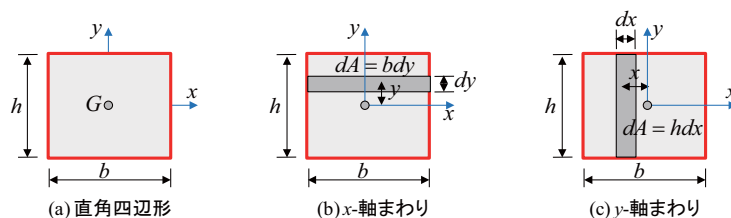


図 6.14 断面二次モーメントと図心：直角四辺形

直角四辺形およびそれによる複合断面は、よく使われる断面形式である。図6.14(a)に示す直角四辺形に対して、図心を通る中立軸まわりの断面二次モーメントの計算は図6.14(b)と(c)を利用する。

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 (b dy) = \frac{by^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \\
 I_y &= \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 (h dx) = \frac{hx^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{hb^3}{12}
 \end{aligned}
 \tag{6.45}$$

曲げモーメント M による垂直応力度 σ の計算式によると、同じ曲げモーメントであっても、断面二次モーメントが大きいほどが、縁端に生じる（絶対値の）最大応力が小さくなる。材料に限界（許容）応力度があるため、最大応力を抑える必要がある。したがって、上記の式によっては、たとえば x -軸まわりの断面二次モーメント I_x を増やすのに、幅 b （1次式）よりもせい h （3次式）を増やしたほうが効果的である。

さらに、直角四辺形の断面積 $A = bh$ を I_x の式に代入すると

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12} \tag{6.46}$$

となるため、同じ断面積であっても、（梁）せいをより大きくしたほうが、断面二次モーメントの増加、そして断面最大応力度の減少に効果的であることが分かる。したがって、梁のせいは普通幅より大きくなっている。

6.4.2.3 三角形と円形

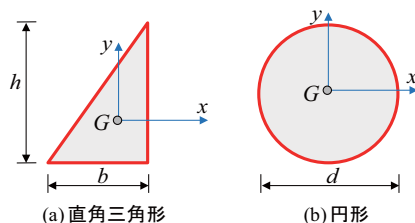


図 6.15 断面二次モーメントと図心：三角形と円形

図6.15に示す三角形と円形の（図心を通る）中立軸まわりの断面二次モーメントの定式は以下のようなとなる。ここで、 d は円の直径である。

$$\begin{aligned} \text{三角形: } I_x &= \frac{bh^3}{36}, I_y = \frac{hb^3}{36} \\ \text{円形: } I_x &= \frac{\pi d^4}{64}, I_y = \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \quad (6.47)$$

6.4.2.4 平行軸定理

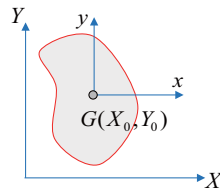


図 6.16 平行軸定理

基本図形の（図心を通る）中立軸まわりの断面二次モーメントを定式化したのが、中立軸と平行する軸まわりの断面二次モーメントもその定式化を利用して簡単に求めることができる。

例えば、図6.16の図形に対しては二つの座標系がある。一つは、図形の図心を原点とした局所座標系 (x, y) であり、その軸は図形の中立軸である。もう一つは、局所座標系の軸と平行する全体座標系 (X, Y) である。

局所座標系の軸まわりの断面二次モーメント I_x と I_y は既知とし、図形の全体座標系の軸まわりの断面二次モーメント I_X と I_Y を求める。したがって、断面二次モーメントの定義式によっては、 X 軸まわりの I_X は以下ようになる。

$$\begin{aligned} I_X &= \int_A Y^2 dA = \int_A (y + Y_0)^2 dA = \int_A (y^2 + 2yY_0 + Y_0^2) dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2Y_0 \int_A y dA + Y_0^2 \int_A dA = I_x + 2Y_0 S_x + Y_0^2 A = I_x + Y_0^2 A \end{aligned} \quad (6.48)$$

ここで、局所座標系の x 軸は図心を通るから、 $S_x = 0$ が利用された。

同じように、 Y 軸まわりの断面二次モーメント I_Y は

$$I_Y = I_y + X_0^2 A \quad (6.49)$$

となる。

平行軸定理は、複合図形の断面二次モーメントの計算にもよく使われる。

6.4.2.5 複合図形



図 6.17 鋼構造の典型的断面形式

材料のメリットをうまく利用できるよう、基本図形以外にもいろいろな断面形式が実構造物に使われている。特に、鉄骨は強度が高く、コストも高いため、(垂直)応力が小さいところに少ない材料で、応力が大きいところにより多い材料で断面が設計されている。例えば、鉄骨の典型的な断面形式は、図6.17に示すものがある。

複合図形の断面二次モーメントを計算するには、前述した各基本図形の中立軸まわりの断面二次モーメントおよび平行軸定理が使える。断面一次モーメントの計算方向と同じように、プラスとマイナスの考え方もある。

図6.18(a)のH形断面は、鉄骨構造の梁ではよく使われる断面形式であり。図6.18(b)のH形断面は、鉄骨構造の柱ではよく使われる断面形式であるここで、これらの断面に対してで、断面二次モーメントの計算を説明する。

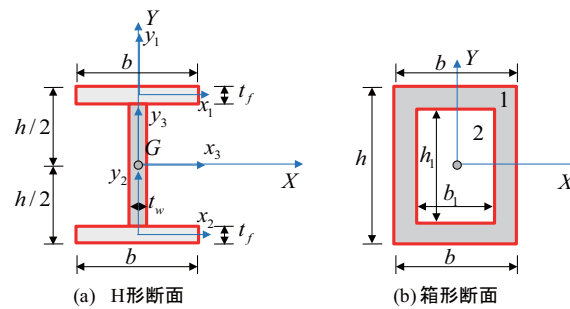


図 6.18 H形と箱(角)形断面の断面二次モーメント

例 6.3. プラスの考え方によって、図6.18(a)のH形断面の(図心を通る)中立軸まわりの断面二次モーメント I_X と I_Y を求めてください。

図6.18(a)のH形断面は、それぞれフランジの直角四辺形1と2、およびウェブの直角四辺形3で構築される。フランジとウェブの厚みはそれぞれ t_f と t_w で表す。直角四辺形のそれぞれの局所座標系における(図心を通る)中立軸まわりの断面二次モーメントは

$$\begin{aligned} I_{x_1} = I_{x_2} &= \frac{bt_f^3}{12}, & I_{y_1} = I_{y_2} &= \frac{t_f b^3}{12} \\ I_{x_3} &= \frac{t_w(h-2t_f)^3}{12}, & I_{y_3} &= \frac{(h-2t_f)t_w^3}{12} \end{aligned} \quad (6.50)$$

となり、全体座標系 (X, Y) まわりの断面二次モーメントは

$$\begin{aligned} I_X &= {}_1I_X + {}_2I_X + {}_3I_X \\ I_Y &= {}_1I_Y + {}_2I_Y + {}_3I_Y \end{aligned} \quad (6.51)$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} 2I_X = {}_1I_X &= I_{x_1} + y_{10}^2 A_1 = \frac{bt_f^3}{12} + \left(\frac{h-t_f}{2}\right)^2 (bt_f) = \frac{bt_f}{12} (4t_f^2 - 6ht_f + 3h^2) \\ 2I_Y = {}_1I_Y &= I_{y_1} + x_{10}^2 A_1 = \frac{bt_f^3}{12} + 0 \cdot (bt_f) = \frac{bt_f^3}{12} \\ 3I_X &= I_{x_3} + y_{30}^2 A_3 = \frac{t_w(h-2t_f)^3}{12} + 0 \cdot [t_w(h-2t_f)] = \frac{t_w(h-2t_f)^3}{12} \\ 3I_Y &= I_{y_3} + x_{30}^2 A_3 = \frac{(h-2t_f)t_w^3}{12} + 0 \cdot [t_w(h-2t_f)] = \frac{(h-2t_f)t_w^3}{12} \end{aligned} \quad (6.52)$$

例 6.4. マイナスの考え方によって、図6.18(b)に示す箱形断面の（図心を通る）中立軸まわりの断面二次モーメント I_X と I_Y を求めてください。

図6.18(b)に示す箱形の複合図形に対して、プラスの考え方によっては、四つの基本図形（直角四辺形）があり、また、基本図形の図心は全体座標系の原点にないため、平行軸定理も必要となる。しかし、マイナスの考え方によっては、箱型断面は大きい直角四辺形から内部の小さい直角四辺形を引くこととなり、さらに、二つの基本図形の図心も全体座標系の原点にあるため、平行軸定理は必要ないとなる。したがって、

$$\begin{aligned} I_X &= {}_1I_X + {}_2I_X = \frac{bh^3}{12} + \frac{-b_1h_1^3}{12} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12} \\ I_Y &= {}_1I_Y + {}_2I_Y = \frac{hb^3}{12} + \frac{-h_1b_1^3}{12} = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1b_1^3}{12} \end{aligned} \quad (6.53)$$

6.4.3 主軸、断面相乗モーメント

ここまでも計算されたとおり、同じ図心を通っても、対象軸が違うと、その断面二次モーメントも違ってくる。すべての対象軸の中で対応する断面二次モーメントは最大となるもの、およびそれに直交する軸（対応する断面二次モーメントは最小）は、主軸と呼ばれる。

断面相乗モーメントは

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (6.54)$$

として定義される。断面相乗モーメントは、あまり使われていないため、具体的な計算は説明しないが、一つの特徴のみを覚えてほしい。それは、直交座標軸のどちらかの軸が対称であれば、その断面相乗モーメントはゼロとなる。

6.5 宿題

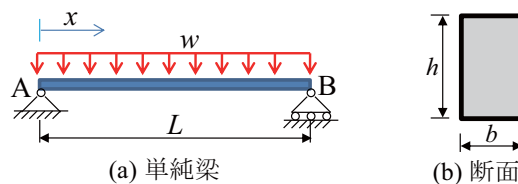


図 6.19 単純梁の形状決定問題

Exercise 6.1. 図6.19の単純梁に対して

1. 曲げモーメントを求め、その分布図を描いてください。
2. その変形図を描いてください。
3. 応力度の許容値を $\bar{\sigma}$ とし、梁断面の幅を b として固定する。その必要最低限のせい h を x の関数として表し、図でそのせいを描いてください。

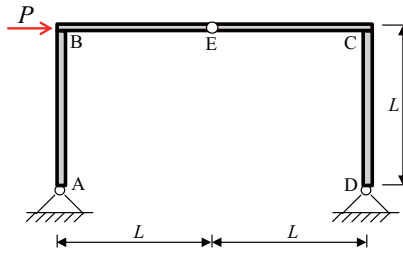


図 6.20 3 ヒンジラーメンの構造設計問題

Exercise 6.2. 図6.20の3ヒンジラーメン構造に対して

1. 断面力（軸力・曲げモーメント・せん断力）を求め、その分布図を描いてください。
2. その変形図を描いてください。
3. すべての部材の断面積を A 、断面係数を Z 、中立軸より上（下）端までの断面1次モーメントを S 、断面2次モーメントを I 、断面の幅を b とした場合、軸力による最大垂直応力度 $|\sigma|_{\max}$ 、曲げモーメントによる最大垂直応力度 $|\sigma|_{\max}$ 、およびせん断力による最大せん断力応力度 $|\tau|_{\max}$ を求めてください。

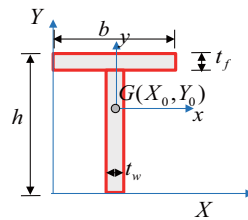


図 6.21 T形断面

Exercise 6.3. 図6.21に示すT型断面には、座標系 (x, y) は断面の図心を通り、座標系 (X, Y) と平行する。

1. 座標系 (X, Y) において、図心の位置 $G(X_0, Y_0)$ を求めてください。
2. x -, y -軸まわりの断面一次モーメント S_x と S_y を求めてください。
3. x -, y -軸まわりの断面二次モーメント I_x と I_y を求めてください。
4. x -軸まわりの曲げモーメントを M_x とし、断面の最大垂直応力度 σ_{\max} を求めてください。