

Chapter 4 静定トラス構造

Abstract この章には、静定トラス構造の力学特性および軸力の解法について説明する。

4.1 トラス構造の力学特性

トラス構造には、異なる部材はピン接合によって接続される。

トラスの力学特性

外力は部材の両端部、要するに、節点にかかるとき、トラス構造の各部材には、軸力しか存在しない。

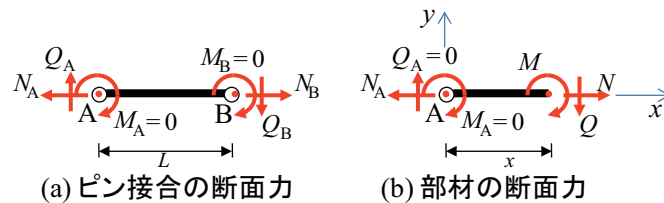


図 4.1 トラス構造の断面力：軸力しか存在しない

すなわち、トラス構造の場合に、部材には曲げモーメントおよびせん断力が生じない。これを証明するには、図4.1に示すようなトラス構造の1本の部材を考える。

例 4.1. トラス構造の部材に軸力しか存在しないことを証明せよ。

部材の両側はピン接合なので、曲げモーメント M_A, M_B はゼロであることが分かっている。A 点まわりのモーメントの釣合い方程式によって、

$$\begin{aligned} M_{A \text{ 点まわり}} &= M_A + M_B + N_A \cdot 0 + Q_B \cdot L + N_B \cdot 0 + Q_B \cdot L = Q_B \cdot L = 0 \\ \implies Q_B &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

が分かる。同じように、A 点のせん断力 Q_A もゼロとなるため、ピン接合のところには軸力しか存在しない。さらに、部材の軸方向の釣合い方程式によって、軸力の関係が分かる。

$$\begin{aligned} \sum \text{軸方向の力} &= -N_A + N_B = 0 \\ \implies N_A &= N_B \end{aligned} \quad (4.2)$$

ピン接合にかかる断面力が分かった後、部材の内部に働いている断面力を考えてみよう。図4.1(a)の部材を適当に切断し、左半分を考え、その切断面に生じる断面力を図4.1(b)に示すように描いておく。力およびモーメントの釣合い方程式によつては

$$\begin{aligned}\sum X &= -N_A + N = 0 \implies N = N_A \\ \sum Y &= Q_A - Q = 0 \implies N = Q_A = 0 \\ \sum M_{\text{切断面まわり}} &= M_A + M + Q_A \cdot x + N_A \cdot 0 = 0 \implies M = 0\end{aligned}\quad (4.3)$$

が分かり、ピン接合にかかる断面力とまったく同じものである。これは、トラス構造の軸力分布を求めるにはよく使われている条件である。

しかし、ここで注意されたいのは、外力荷重が部材の間にも作用するとき、トラスの部材は普通の梁と同じように、せん断力も曲げモーメントも生じる。

4.2 トラス構造の静定・安定

4.2.1 静定と不静定

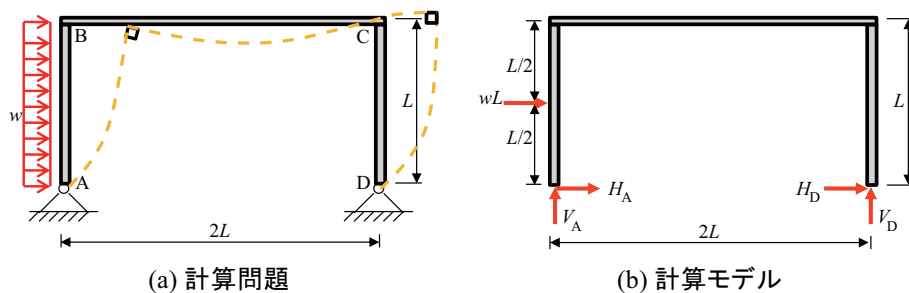


図 4.2 不静定ラーメン構造：二次元の場合に、三つの釣合い方程式に対して、四つ（以上）の反力があるので、そのままでは解けない。

第三章にある静定ラーメン構造および3ヒンジラーメン構造の例題では、反力の数と釣合い方程式の数は同じなので、反力を求めることができたが、例えば、図4.2のラーメン構造のように、四つの反力に対して三つの釣合い方程式しか書けない場合がある。したがって、釣合い方程式のみで、この構造の反力を求めることはできない。

静定と不静定：

力とモーメントの釣合い方程式のみで、反力・断面力を一意に求められる構造を静定構造 (Static Determinacy) と呼ぶ。

力とモーメントの釣合い方程式のみで、反力・断面力を一意に求められない構造は、不静定構造 (Static Indeterminacy) と呼ばれる。

したがって、図4.2のようなラーメン構造は不静定構造である。ここで注意してほしいのは、釣合い方程式で反力（または断面力）が求められても、断面力（または反力）が求められない場合も不静定構造となる。不静定構造の場合に、釣合い方程式だけでは、方程式の数は足りないが、将来に説明する変位（の適合条件）を考えると、解けるようになる。

さらに、釣合い方程式からすぐ分かるように、静定構造の場合に外力が作用しない時、断面力（軸力）もゼロとなることが自明である。しかし、不静定構造の場合には、外力がなくても断面力（軸力）が存在する可能性がある。

実際の建築構造物はほとんど不静定構造であるが、構造力学には、とりあえずより簡単な静定構造の断面力分布および変形の求め方を勉強してから、不静定構造に展開していく。

4.2.2 安定と不安定

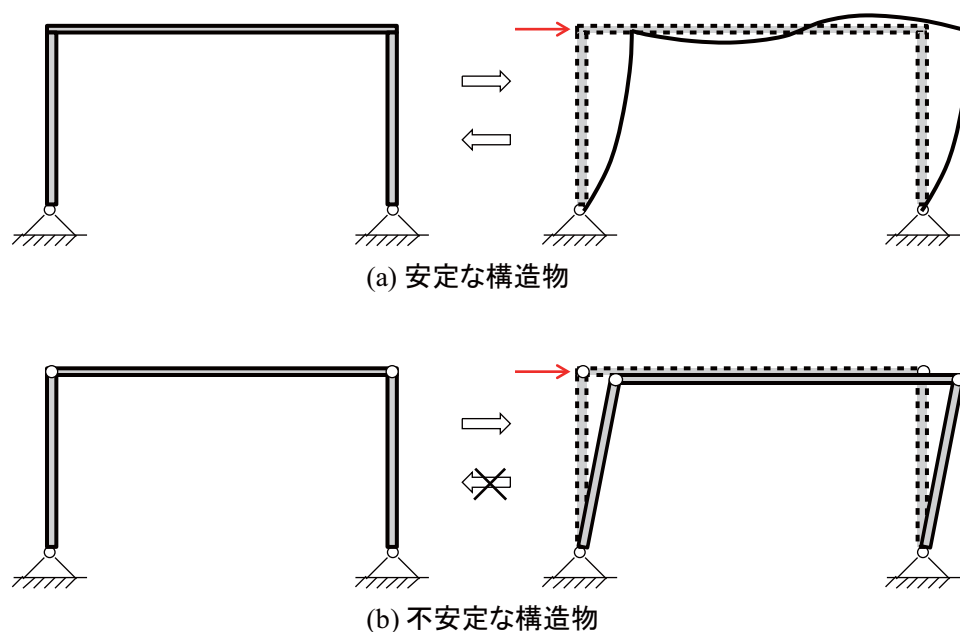


図 4.3 安定・不安定構造：安定な構造物は、外力によって形が変わるが、外力をなくしたら元の形状に戻れる。不安定な構造の場合には、外力をなくしても元の形状に戻れない。

釣合いと安定は、構造物にとって二つ重要な概念である。釣合い (Equilibrium) とは、第二章でも説明したように、ある構造物（または部材や点など）に作用する力およびモーメントの総和はゼロである状態を示す。

安定と不安定：

安定 (Kinematic Determinacy) というのは、構造物に少しの外力を加えると変形するが、外力をなくしたら変形も消えて元の形状・位置に戻ること示す。それに対して、不安定 (Kinematic Indeterminacy) というのは、外力をなくして元の形状・位置に戻れないことを示す。

例えば、図4.3(a)の（不静定）ラーメン構造の上層に水平方向の外力をかけると、図に示すように変形するが、この外力をなくしたら元の形状に戻るため、安定構造である。図4.3(b)の構造は、図4.3(a)の構造の剛接合をピン接合に置換されたものであり、水平方向の外力をかけると、構造物は全体的に斜めになり、外力をなくしても元の形状には戻れないため、不安定構造である。

建築構造は、もちろんすべては安定な構造であるが、機械系などの分野では、構造物の形を変える場合もあるので、不安定構造も取り扱っている。

4.2.3 Maxwell's ルール

構造物は静定か安定かを判断するには、Maxwell's ルールという簡単な条件式がある。しかし、この条件式はピン接合の（トラス）構造のみ適応¹している。部材の数を m 、節点の数を n 、次元を d 、反力の数を p で表すと、Maxwell's ルールは以下のようになる。

Maxwell's 条件式：

$$m - n \times d + p \begin{cases} > 0: \text{不静定かつ安定} \\ = 0: \text{静定かつ安定} \\ < 0: \text{不安定} \end{cases} \quad (4.4)$$

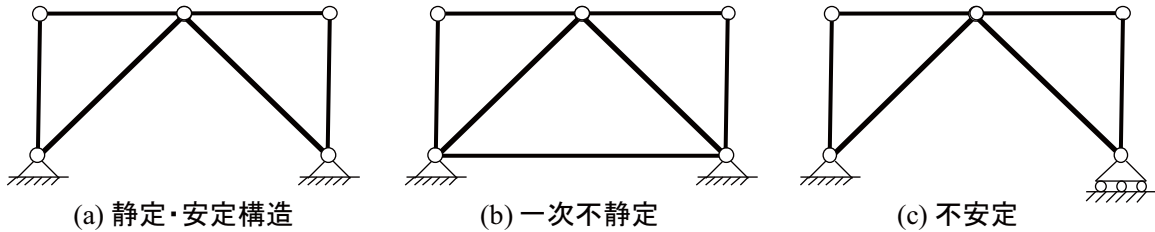


図 4.4 Maxwell's ルールにより静定・安定の判断

例 4.2. Maxwell's ルールを使って、図4.4の三つのトラス構造の静定性および安定性を判定してください。

式 (4.4) の Maxwell's ルールを適用すれば、図4.4の三つのトラス構造はそれぞれ

$$\begin{aligned} (a) \quad m - n \times d + p &= 6 - 5 \times 2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \text{安定・静定} \\ (b) \quad m - n \times d + p &= 7 - 5 \times 2 + 4 = 1 \quad \Rightarrow \text{安定・一次不静定} \\ (c) \quad m - n \times d + p &= 6 - 5 \times 2 + 3 = -1 \quad \Rightarrow \text{不安定} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となることが分かる。

4.2.3.1 Maxwell's ルールの例外

実は、Maxwell's ルールには例外がある²。そのため、Maxwell's ルールはあくまでもトラス構造の安定・静定に関する簡易的判定条件である。特殊な構造物に対しては、更なる精査が必要となる場合がある。

例 4.3. Maxwell's ルールの例外

図 4.5に示すような二次元 ($d = 2$) トラス構造は、6 本の部材 ($m = 6$)、5 個の節点 ($n = 5$) および四つの反力 ($p = 4$) をもつ。

Maxwell's ルールによれば、

$$m - n \times d + p = 6 - 5 \times 2 + 4 = 0 \quad (4.6)$$

¹ ラーメン構造の静定・安定については、回転拘束を解放し、トラスモデルに変換することによって Maxwell's ルールも適用できる。詳細については、第五章に説明する。

² 現時点では気にしなくてよいので、下記の内容は紹介の役割だけである。

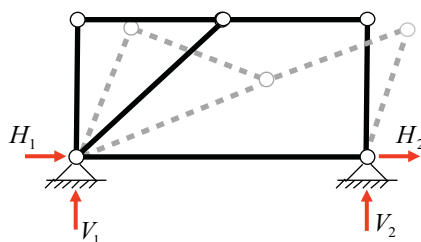


図 4.5 Maxwell's ルールによつては安定かつ静定であるが、実は 1 次不安定かつ 1 次不静定である。

となり、静定かつ安定な構造物になりそうだが、実は図 4.5 に示すような点線で変形できるため、不安定な構造物である。さらに、支点の間の部材にはいくらの張力を導入してもできるため、不静定な構造でもある。

テンセグリティ (Tensegrity = Tensile + Integrity) 構造は、トラスと同じようなピン接合の構造である。Maxwell's ルールによつては、ほとんどのテンセグリティ構造は不安定であるが、部材に予め張力を導入することによつて、構造物が安定化させる。

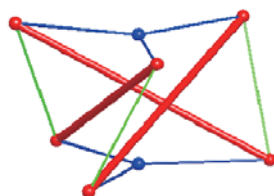


図 4.6 Maxwell's ルールの例外：安定なテンセグリティ構造。（不安定次数が高いが、張力の導入によつて安定となる。）

例 4.4. Maxwell's ルールにより図 4.6 のテンセグリティ構造に関する安定性調査

図 4.6 に示すような三次元 ($d = 3$) Star-shaped テンセグリティ構造は、12 本の部材 ($m = 12$) と 8 個の節点 ($n = 8$) をもつ。三次元空間において、剛体変位を拘束するために、六つの反力 ($p = 6$) が必要である。

Maxwell's ルールによつては、

$$m - n \times d + p = 12 - 8 \times 3 + 6 = -6 \quad (4.7)$$

その不安定次数が高いため、張力が存在しない場合には不安定な構造物である。

実は、この構造物は 1 次不静定であり、7 次不安定である。しかし、図に示すように細い部材 (ケーブル) に引張力、太い部材 (棒材) に圧縮力を導入することによつて、この構造物は安定となる。

テンセグリティ構造は必要最小限の数の部材で安定な構造物を構築しているため、ある意味では最適な構造形式といわれている。

4.3 トラス構造の断面力（軸力）の解法

静定トラス構造の軸力を求めるには、切断法と節点法がある³。節点法は実際には切断法の特殊な応用である。この二つの手法はそれぞれの長所があるため、場合によつて選べば問題が簡単に解けるようになるケースが少なくない。

³ 将来はコンピュータに向いている行列法も紹介する。

4.3.1 切断法

切断法のポイントは、構造物全体を二つの部分に切断し、切断された部材の軸力と反力による力・モーメントの釣合い方程式によって切断された部材の軸力を求める。したがって、一回に切断する軸力が未知の部材の数は3以下でないと解けなくなる。

切断法の計算手順を以下のようにまとめる。

1. Maxwell's ルールによって、静定か不静定かを判断する。静定トラスの場合には以下の手順で解ける。
2. 反力を求める。(場合によって省略できる)
3. 軸力を求めたい部材を含む周辺の3つの部材を切断して、トラスを2つの部分に分ける。
4. 切断した部材の軸力を外力として作用させる。
5. 力とモーメントに関する3つの釣合い方程式をたてる。
6. 釣合い方程式3つあるので、3つの未知軸力を一意に求める。

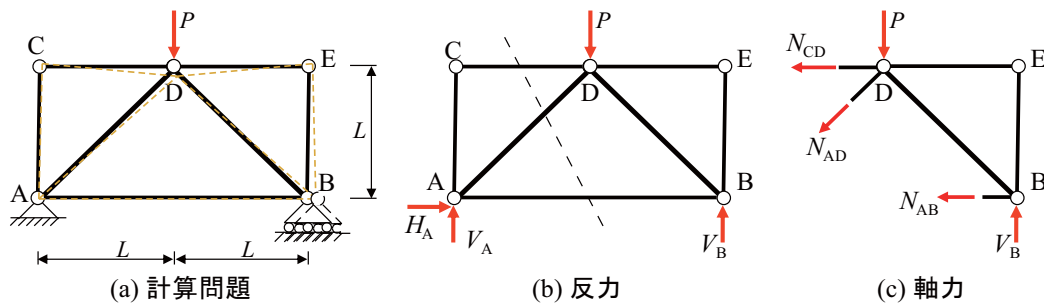


図 4.7 切断法の例題

例 4.5. 図4.7(a) のトラス構造に対して以下の小問題を解いてください。

- ① このトラス構造が静定性および安定性を Maxwell's ルールによって判断してください。
- ② 切断法を使って、部材 AD, AB, CD の断面力(軸力)を求めてください。

図4.7(a) のトラス構造の変形は、点線で表されている。

① 静定・安定の判断

A 点がピン支点のため、反力は二つがあり、B 点がローラー支点のため、鉛直反力のみがある。したがって、反力の数は3である ($p=3$)。

また、トラス構造は7本の部材 ($m=7$) と五つの節点 ($n=5$) をもつため、Maxwell's ルールを適用すると

$$m - n \times d + p = 7 - 5 \times 2 + 3 = 0 \quad (4.8)$$

このトラス構造は静定かつ安定であることが分かる。従って、力およびモーメントの釣合い方程式のみでその反力および断面力(この場合に、軸力)を求めることができる。

② 切断法

反力計算:

支点反力を図4.7(b)のように描く。トラス構造全体を対象とし、その力・モーメントに関する釣合い方程式を立てると、反力は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\sum X = H_A = 0 &\implies \underline{H_A} = 0 \\ \sum M_{A \text{点まわり}} = PL - V_B(2L) = 0 &\implies \underline{V_B} = \frac{P}{2} \quad (\uparrow) \\ \sum Y = V_A + V_B - P = 0 &\implies \underline{V_A} = P - V_B = \frac{P}{2} \quad (\uparrow)\end{aligned}\quad (4.9)$$

軸力計算：

さらに、図4.7(b)の破線で部材 CD、AD、AB を仮想的に切断して、右半分の構造を考える。部材の軸力および外力（反力も含めて）は図4.7(c)のように描ける⁴。未知数は軸力 N_{CD}, N_{AD}, N_{AB} であり、3つあるため、3つの釣合い方程式によってこの問題を解くことが出来る。

簡単順から解いていくと、切断された部材の軸力は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\sum M_{D \text{点まわり}} = -N_{AB}L + V_B L = 0 &\implies \underline{N_{AB}} = V_B = \frac{P}{2} \\ \sum Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_{AD} + V_B - P = 0 &\implies \underline{N_{AD}} = \sqrt{2}(-P + V_B) = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \quad (4.10) \\ \sum X = -N_{CD} - \frac{\sqrt{2}}{2}N_{AD} - N_{AB} = 0 &\implies \underline{N_{CD}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_{AD} - N_{AB} = 0\end{aligned}$$

ここで、軸力の定義によっては、正は引張力、負は圧縮力を表している。

4.3.2 節点法

節点法は、一つ一つの節点を計算対象とし、(二つの)力の釣合い方程式によって未知の軸力を求める手法である。実は、節点法は切断法の特殊な場合である：節点まわりに(曲線で)部材を切断すると、対象の節点に接続している部材の軸力のみ残るため、節点法が適用する。

しかし、この場合には、すべての力(軸力および外力)は一つの(節)点に作用しているため、モーメントの釣合い方程式は自明となる：力の釣合いによっては対象節点にかかる力の総和はゼロとなるので、この合力の任意点まわりのモーメントも必ずゼロとなる。したがって、節点を対象とした場合には、2次元において二つの力の釣合い方程式しか書けないので、解き順番に注意しないとできない：解ける節点から順番に解いていく、すなわち先に二つ以下の未知軸力を有する節点から解かないとできない。

節点法の計算手順は以下のようにまとめる。

1. Maxwell's ルールによって、静定か不静定かを判断する。静定トラスの場合には以下の手順で解ける。
2. 反力を求める。(場合によって省略できる)
3. 未知軸力が2つ以下である節点を対象とする。
4. 対象節点に対して、外力と軸力を二つの方向に分解し、力の釣合い条件により、未知軸力を求める。
5. ステップ3と4を繰り返して、軸力を一つずつ求める。

例 4.6. 図4.7(a)のトラス構造に対して、節点法を使って、すべての部材の断面力(軸力)を求めてください。

図4.8(a)のトラス構造の静定・安定判断および反力の計算は、例 4.5を参考してください。ここには省略する。

また、図4.8(a)に対して各節点まわりを切断し、一つ一つの節点を取り出して、切断された部材の軸力を描くと、図4.8(b)のようになる。

⁴ 軸力の向きは、正方向の引張方向として描くことを注意してほしい。

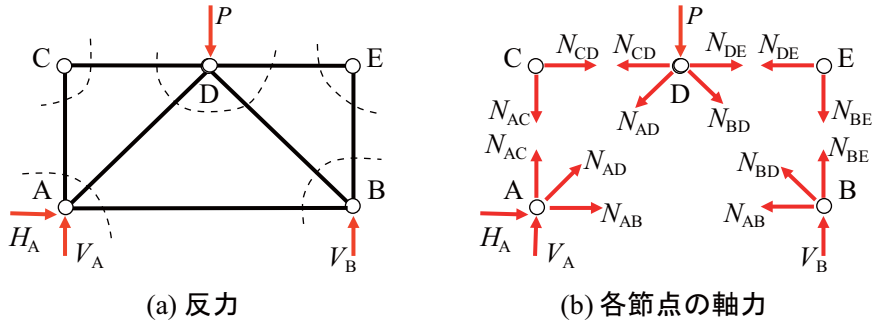


図 4.8 節点法の例題：(a) の計算モデルに対して、各節点のみを切断し取りたして考えると、各節点の釣合いは (b) のようになる。

反力 H_A, V_A, V_B をすでに (例 4.5) 求められたとすると、各節点における未知の軸力の数は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
 \text{A 節点} &: 3 (N_{AB}, N_{AC}, N_{AD} + V_A + H_A) \\
 \text{B 節点} &: 3 (N_{AB}, N_{BD}, N_{BE} + V_B) \\
 \text{C 節点} &: 2 (N_{AC}, N_{CD}) \\
 \text{D 節点} &: 4 (N_{AD}, N_{BD}, N_{CD}, N_{DE}) \\
 \text{E 節点} &: 2 (N_{BE}, N_{DE})
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

一つの節点に多くても二つの未知軸力でなければならないため、例えば以下のような順番で解いていく。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{C} & \longrightarrow & \text{E} & \longrightarrow & \text{A} & \longrightarrow & \text{B} & \longrightarrow & \text{D} \\
 (N_{AC}, N_{CD}) & & (N_{DE}, N_{BE}) & & (N_{AD}, N_{AB}) & & (N_{BD}) & & (\text{結果の検証})
 \end{array} \tag{4.12}$$

具体的には、以下のように一つ一つの節点を対象にして未知の軸力を求める。

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{C 点}} &: \begin{cases} \sum X = N_{CD} = 0 \implies \underline{N_{CD}} = 0 \\ \sum Y = -N_{AC} = 0 \implies \underline{N_{AC}} = 0 \end{cases} \\
 \underline{\text{E 点}} &: \begin{cases} \sum X = -N_{DE} = 0 \implies \underline{N_{DE}} = 0 \\ \sum Y = -N_{BE} = 0 \implies \underline{N_{BE}} = 0 \end{cases} \\
 \underline{\text{A 点}} &: \begin{cases} \sum Y = N_{AC} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} + V_A = 0 \implies \underline{N_{AD}} = \sqrt{2}(-N_{AC} - V_A) = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \\ \sum X = H_A + N_{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} = 0 \implies \underline{N_{AB}} = -H_A - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} = \frac{1}{2}P \end{cases} \\
 \underline{\text{B 点}} &: \sum X = -N_{AB} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BD} = 0 \implies \underline{N_{BD}} = -\sqrt{2}N_{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \\
 \underline{\text{D 点}} &: \begin{cases} \sum X = -N_{CD} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} + N_{DE} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BD} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P = 0 \\ \sum Y = -P - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{AD} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BD} = -P + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P = 0 \end{cases} \implies \text{計算 OK}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで、軸力を求めるには、D 点の計算は不要であるが、D 点において力の総和がゼロとなるかどうかによって計算結果は正しさを検証できる。また、各部材の軸力を図 4.9 に示す。軸力の定義によっては、正の軸力が引張力、負の軸力が圧縮力を意味する。

実は、この例題ではたくさんの解き順番がある。たとえば、以下の順番に進むと、反力を求めなくてもすべての部材の軸力を求めることができる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{C} & \longrightarrow & \text{E} & \longrightarrow & \text{D} & \longrightarrow & \text{B} \\
 (N_{AC}, N_{CD}) & & (N_{DE}, N_{BE}) & & (N_{AD}, N_{BD}) & & (N_{AB})
 \end{array} \tag{4.15}$$

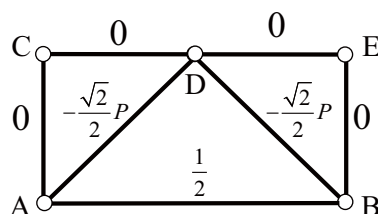


図 4.9 例 4.6 の計算結果。

4.3.3 切断法と節点法の比較

この章で紹介した切断法も節点法も、構造物の一部または節点対象とし、力・モーメントの釣合い方程式を解くことによって、トラスの軸力を一つずつ求めていくものである。したがって、手計算には向いているが、行列の計算が強いコンピュータの計算能力を生かすのは容易ではない。それに対しては、行列という形で釣合い方程式をまとめてコンピュータで一遍に計算する行列法がある。

また、トラス構造のある部分の軸力を求めたい場合に、切断法は一般的に適用される。すべての軸力を求める場合には、節点法のほうがより解きやすいケースが多い。

さらに、例題でもあったように、解く順番も計算コストに影響してくる。

4.4 トラス構造のための行列解法

構造力学の基本を理解してもらうために、すべて手計算ができるような問題を考えている。しかし、実際の建物は手計算できる問題よりもずっと大規模であり、現実的には手計算が難しい。実務構造設計において、コンピュータによる構造計算は必須となっている。コンピュータは行列計算に強いので、構造計算も基本的には行列式で定式化してから、コンピュータで計算を行っている。

静定構造に対しては、力・モーメントの釣合い方程式のみで、すべての反力・断面力を一意に求めることができる。それらのすべての釣合い方程式を行列式にまとめると、以下のような形式で書ける。

$$\mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}\mathbf{s} = -\mathbf{p} \quad (4.16)$$

ここで、 \mathbf{D} は釣合い行列 (Equilibrium Matrix)、 \mathbf{s} は反力を含む断面力ベクトル (Force Vector)、 \mathbf{p} は外力ベクトル (Load Vector) である。外力をうけて建物のすべての反力および断面力を求める問題においては、断面力ベクトル \mathbf{s} は未知数となり、釣合い行列は正則⁵の場合に、以下のように解ける。

$$\mathbf{s} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{p} \quad (4.17)$$

ここで、 \mathbf{D}^{-1} は釣合い行列 \mathbf{D} の逆行列である。

次は、 d 次元⁶の n 個の節点および m 本の部材を持つトラス構造を考える。また、反力の数は p とする。したがって、釣合い行列 \mathbf{D} のサイズは $(dn) \times (m+p)$ 、(断面) 軸力ベクトル \mathbf{s} のサイズは $(m+p) \times 1$ 、外力ベクトル \mathbf{p} のサイズは $dn \times 1$ となる。

⁵ 正則な行列は逆行列をもてる。行列の逆行列を求めるには、たとえば MS Excell の MINVERSE 関数または無料で使える Octave の inv() 関数などがある。

⁶ 二次元の場合 $d=2$ 、三次元の場合 $d=3$ 。

例 4.7. 図 4.7(a) のトラス構造に対して、行列法を使って、すべての反力および部材軸力を求めてください。

図 4.7(a) のトラス構造は、五つの節点、七つの部材および三つの反力を有する。すなわち

$$n = 5, \quad m = 7, \quad p = 3 \quad (4.18)$$

釣合い行列を $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ で表す。軸力ベクトルを ${}^7\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ で表し、その成分は以下のとおりである。

$$\mathbf{s} = (N_{AB} \ N_{AC} \ N_{AD} \ N_{BD} \ N_{BE} \ N_{CD} \ N_{DE} \ H_A \ V_A \ V_B)^\top \quad (4.19)$$

ここで、 $(\dots)^\top$ はベクトルまたは行列の転置である。外力ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ で表し、その成分は以下のとおりである。

$$\mathbf{p} = (P_A^x \ P_A^y \ P_B^x \ P_B^y \ P_C^x \ P_C^y \ P_D^x \ P_D^y \ P_E^x \ P_E^y)^\top \quad (4.20)$$

各節点に関する水平および垂直方向の釣合い方程式を行列の形式で整理すると、下のような式となる。

$$\begin{pmatrix} \sum X_A \\ \sum Y_A \\ \sum X_B \\ \sum Y_B \\ \sum X_C \\ \sum Y_C \\ \sum X_D \\ \sum Y_D \\ \sum X_E \\ \sum Y_E \end{pmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

ここで、釣合い行列 \mathbf{D} は例 4.6 の節点法で立てた釣合い方程式によって、以下のようにまとめることが出来る。

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & & & & & & & & & 1 \\ & 1 & \sqrt{2}/2 & & & & & & & & 1 \\ -1 & & & -\sqrt{2}/2 & & & & & & & 1 \\ & & & \sqrt{2}/2 & 1 & & & & & & 1 \\ & -1 & & & & 1 & & & & & \\ & & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & & -1 & 1 & & & & \\ & & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

また、外力ベクトル \mathbf{p} は以下のようなになる。

$$\mathbf{p} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0)^\top P \quad (4.23)$$

釣合い行列 \mathbf{D} の逆行列 \mathbf{D}^{-1} は以下のように計算できる。

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1/2 \ 0 \ -1/2 \ 1/2 \ -1/2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\sqrt{2}/2 \ 0 \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \sqrt{2}/2 \ 0 \ \sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2 \ \sqrt{2}/2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 1/2 \ 1/2 \ 1/2 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1/2 \ 0 \ -1/2 \ 1/2 \ -1/2 \ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

そして、その反力および軸力は式 (4.17) を適用して、以下のように求められる。

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} N_{AB} \\ N_{AC} \\ N_{AD} \\ N_{BD} \\ N_{BE} \\ N_{CD} \\ N_{DE} \\ H_A \\ V_A \\ V_B \end{pmatrix} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} P \tag{4.25}$$

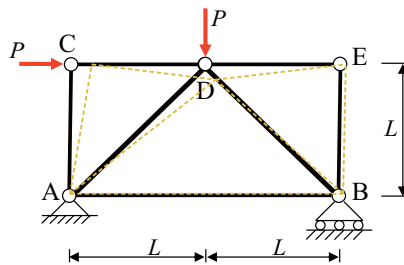


図 4.10 例 4.8の静定トラス構造

釣合い行列 \mathbf{D} は構造物の特性を反映したもので、外力と関係ない。したがって、同じ構造であれば、その釣合い行列も同じである。

例 4.8. 図 4.10のトラス構造に対し、すべての反力および部材軸力を求めてください。

外力の作用の下で、図 4.10のトラス構造の変形図が点線で表されている。

その反力および軸力は式 (4.17) を適用して、以下のように求められる。

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} N_{AB} \\ N_{AC} \\ N_{AD} \\ N_{BD} \\ N_{BE} \\ N_{CD} \\ N_{DE} \\ H_A \\ V_A \\ V_B \end{pmatrix} = -\mathbf{D}^{-1} \begin{pmatrix} P_A^x \\ P_A^y \\ P_B^x \\ P_B^y \\ P_C^x \\ P_C^y \\ P_D^x \\ P_D^y \\ P_E^x \\ P_E^y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P \tag{4.26}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P$$

⁷ スペースを節約するため、縦ベクトルを転置 \top を使って横ベクトルのように書く。

以上の例題から、釣合い行列が正則、すなわち逆行列をもつ場合に、未知数である反力および軸力（断面力）を一意に求めることができる。これは静定構造の性質に一致することを思い出してほしい。

さらに行列を分析すると、未知数が $m+p$ 個があり、（線形独立な）方程式がちょうど dn 個がある。

$$m+p=dn, \quad \text{または} \quad m+p-dn=0 \quad (4.27)$$

の場合しか、この線形方程式が解けない。これは Maxwell's ルールと同じ結論に至ることに注意してほしい。

4.5 宿題

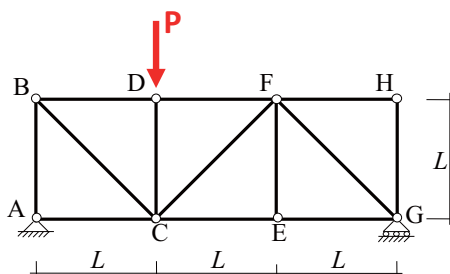


図 4.11 宿題4.1、4.2と4.3

Exercise 4.1. 図 4.11のトラス構造に対して

1. その変形図を描いてください。
2. その静定・安定を Maxwell's ルールによって判断する。
3. 切断法を使って部材 DF, CF, CE の軸力を求めてください。

Exercise 4.2. 図 4.11のトラス構造に対して、節点法を使ってすべての部材の軸力を求めてください。

Exercise 4.3. 図 4.11のトラス構造に対して、行列法を使ってすべての反力および部材の軸力を求めてください。