

Chapter 3

建物のモデル化および性質

Abstract この章には、建物の内部に働いている（断面）力、支点の反力および変形を求めるために、実際の建物を近似的にモデル化する方法、さらにその基本性質について説明する。

3.1 外力のモデル化

外部環境による生じる外力（External Load）は、「荷重」または「外力荷重」とも呼ばれる。台風や地震や雪など、場合によって構造物には多種類の外力が作用している。これらの外力はそれぞれ特性をもち、異なる基準によって何種類に分類できる。例えば、

- 作用面積によって、外力荷重は**集中荷重**と**分布荷重**に分類できる。
集中荷重 (Concentrated Load) とは、床に対して人間の自重など力の作用点・面が力を受ける面積より十分に小さいとき、外力を集中荷重として近似する。
分布荷重 (Distributed Load) とは、屋根に対して雪の自重など力の作用面が力を受ける面積と同じくらいになるとき、外力を分布荷重で表現する。
- 方向によっては、外力荷重は**水平荷重**と**鉛直荷重**に分類できる。
水平荷重 (Horizontal Load) とは、風および地震などのような水平方向にかかる外力を指す。
鉛直荷重 (Vertical Load) とは、構造物の自重などのような鉛直方向にかかる外力を指す。
- 継続時間によっては、外力荷重は**長期荷重**と**短期荷重**に分類できる。
長期荷重 (Long-term Load) とは、構造物の自重などのような長期にわたってかかる外力を指す。
短期荷重 (Short-term Load) とは、風および地震などのような一時的にかかる外力を指す。
- 時刻変化によっては、外力荷重は**静的荷重**と**動的荷重**に分類できる。
静的荷重 (Static Load) とは、いつでも同じ大きさ・方向・作用点にかかる外力を指す。
動的荷重 (Dynamic Load) とは、地震などのような時刻によって大きさ・方向・作用点が変わる外力を指す。

などのように分類できる。一つの外力は、いくつかの性質をもっていることに注意したい。例えば、建物の自重は鉛直荷重・長期荷重・静的荷重である。また、建物のパーツである梁の荷重は分布荷重とされることは一般的である。

さらに、長期・短期荷重は実際の構造設計に安全係数という形で考慮されることが多い。また動的荷重による構造物の挙動を計算するには時刻歴解析 (Time History Analysis) を行う必要がある。構造力学には、これらの構造計算の基礎となるが、荷重の時間変化を考慮しないとす。すなわち、静的荷重に限定する。

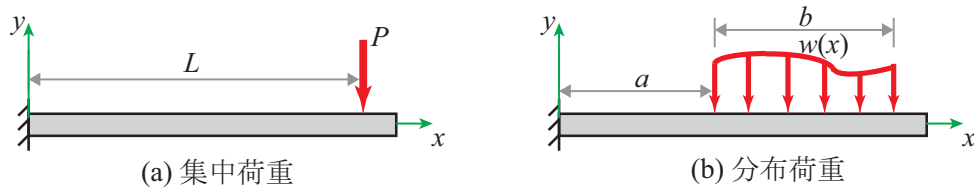


図 3.1 集中荷重および分布荷重の図示

3.1.1 集中荷重と分布荷重

- 集中荷重とは、外力の作用面積が十分小さい時、近似的に一つの点に集中するとされる外力荷重である。
- 集中荷重と比較して、分布荷重は、一定面積内に作用する外力荷重である。

例えば、人が床の上に立つ場合、床の面積の割に、人間の脚の面積が非常に小さいので、床に対して人間の自重による外力は集中荷重と考えてよい。

または、雪は屋根の上に積もっている時、雪の自重による外力荷重は一つの点に集中するとすることができないため、分布荷重として取り扱うことが一般的である。

図3.1は、2次元においての集中荷重および分布荷重の一般的な図示である。集中荷重の単位は、力と同じであるため、N または kN で表す。分布荷重は単位長さまたは単位面積あたりの力なので、その単位はそれぞれ N/m と N/m² で表す。

3.1.2 分布荷重の種類と数学的定義

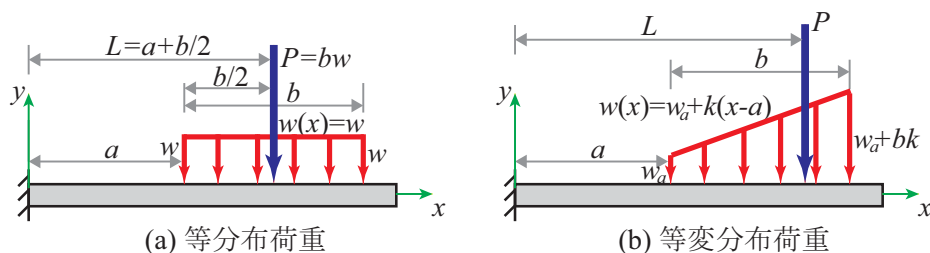


図 3.2 等分布荷重と等変分布荷重

分布荷重には、荷重の分布によっていろいろと分類できるが、以下の二つのケースは最もよく使われている。

- 等分布荷重：図3.2(a)に示すように、分布荷重の大きさはどこでも同じである。数学的には、

$$w(x) = w \quad (3.1)$$

で表す。ここで、 L , a , b は荷重の位置および作用範囲、 P , $w(x)$ は荷重の大きさを表す。また、 $w(x)$ は、分布荷重の大きさは x の関数であることを意味する。等分布荷重の場合には、 w は不変 (constant) の数値である。

- 等変分布荷重：図3.2(b)に示した台形のように、分布荷重の大きさの変化は一定である。数学的には、

$$w(x) = w_a + k(x - a) \quad (3.2)$$

で表すことができる。ここで、 w_a は $x = a$ のところの分布荷重の大きさ、 k は一定の勾配である。

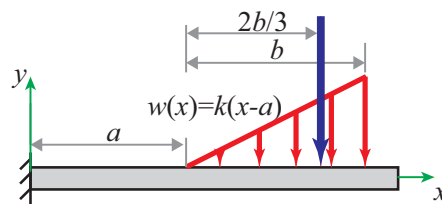


図 3.3 三角形の分布荷重

等変分布荷重に対して、 $w_a = 0$ の場合には、図3.3に示すように、分布荷重の形状は三角形になる。

3.1.3 分布荷重から集中荷重への変換

分布荷重はある範囲内で作用しているため、計算は集中荷重よりややこしくなる。したがって、実際の構造力学計算においては、分布荷重を集中荷重に変換することが多い。この場合には、前章で説明したパルニオンの定理が適用される。

分布荷重より変換された集中荷重の大きさ P は

$$P = \int_a^{a+b} w(x) dx \quad (3.3)$$

となり、変換された集中荷重の作用点の位置はパルニオンの定理においてのモーメント一致によって、

$$\begin{aligned} PL &= \int_a^{a+b} w(x) \cdot x dx \\ \implies L &= \frac{\int_a^{a+b} w(x) \cdot x dx}{P} = \frac{\int_a^{a+b} w(x) \cdot x dx}{\int_a^{a+b} w(x) dx} \end{aligned} \quad (3.4)$$

で計算することができる。

例 3.1. 図3.2(a)に示す（直角四辺形）等分布荷重を集中荷重に変換する。

図3.2(a)の等分布荷重の場合、変換された集中荷重の大きさは

$$\begin{aligned} P &= \int_a^{a+b} w dx = \int_a^{a+b} wx \Big|_a^{a+b} \\ &= bw \end{aligned} \quad (3.5)$$

であり、その位置は

$$L = \frac{\int_a^{a+b} (w dx) \cdot x}{P} = \frac{wx^2/2 \Big|_a^{a+b}}{bw} = \frac{w[(a+b)^2 - a^2]/2}{bw}$$

$$= a + \frac{b}{2} \quad (3.6)$$

となる。明らかに、変換された集中荷重の大きさは、等分布荷重でなす直角四辺形の面積となり、その位置は直角四辺形の中心（図心）となる。これはたまたまではなく、任意形状の分布荷重に対しても適用できる。理由は、その大きさおよび位置の計算は、後で出てくる図心の計算式と同じである。

三角形等変分布荷重は台形等変分布荷重の特殊の場合であり、その計算は以下の例題で説明する。

例 3.2. 図3.3に示す三角形等変分布荷重を集中荷重に変換する。

図3.3に示すような三角形の等変分布荷重の大きさは、

$$P = \int_a^{a+b} w(x) dx = \int_a^{a+b} k(x-a) dx = \left[\frac{kx^2}{2} - ax \right]_a^{a+b}$$

$$= \frac{kb^2}{2} \quad (3.7)$$

となり、等変分布荷重の三角形の面積と一致していることがわかる。また、等価の集中荷重の作用点は

$$L = \frac{\int_a^{a+b} [k(x-a)] dx \cdot x}{P} = \frac{\int_0^b (k\bar{x}) d\bar{x} \cdot (\bar{x}+a)}{P} = \frac{\left[\frac{k\bar{x}^3}{3} + \frac{k a \bar{x}^2}{2} \right]_0^b}{kb^2/2}$$

$$= a + \frac{2}{3}b \quad (3.8)$$

となり、等変分布荷重の三角形の中心と一致している。ここで、積分の計算を簡単にするため、 $\bar{x} = x - a$ および $x = \bar{x} + a$ とした。

前に説明したパリーニオン定理により、台形等変分布荷重を集中荷重に変換するには、以下の例題で説明する。

例 3.3. 図3.2(b)に示す台形等変分布荷重を集中荷重に変換する。

図3.2(b)に示すような台形の等変分布荷重の場合も等分布荷重と同じように計算できる。変換された集中荷重の大きさは

$$P = \int_a^{a+b} w(x) dx = \int_a^{a+b} w_a + k(x-a) dx = \left[w_a x + \frac{kx^2}{2} - ax \right]_a^{a+b} = bw_a + \frac{kb^2}{2} \quad (3.9)$$

となり、台形の面積

$$A = [w_a + (w_a + kb)] \cdot b/2$$

$$= bw_a + \frac{kb^2}{2} \quad (3.10)$$

に一致する。

また、変換された集中荷重の位置も等分布荷重のように計算できる：

$$L = \frac{\int_a^{a+b} [w_a + k(x-a)] dx \cdot x}{P} = \frac{\int_a^{a+b} w_a \cdot x dx + \int_a^{a+b} kx(x-a) dx}{P} \quad (3.11)$$

■ 残りの計算はややこしいので、ここでは省略する。しかし、この式に関する考察が重要である。

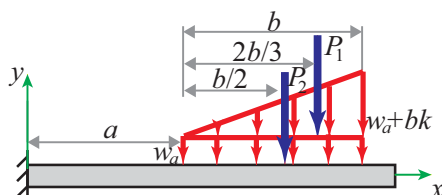


図 3.4 台形等変分布荷重を基本図形の直角四辺形および三角形分布荷重に分解する。

例 3.2にある三角形等変分布荷重、例 3.1になる直角四辺形等分布荷重、および例 3.3にある台形等変分布荷重を比較すれば、以下のことが分かる。

- 台形等変分布荷重の大きさは、直角四辺形等分布荷重および三角形等変分布荷重の和である。
- 台形等変分布荷重の（ある点回りの）モーメントは、それぞれ直角四辺形等分布荷重および三角形等変分布荷重によるモーメントの和である。

したがって、台形をパニオン定理をそのまま適用するよりも、図 3.4に示すように、大きさおよび作用点を簡単に計算できる基本図形（四角形および三角形）に分解する。各基本図形の大きさおよびそれによるモーメントの和で計算すれば良いため、計算上非常に解きやすくなる。たとえば、以下の例題で考えてみる。

例 3.4. 基本図形分解により台形等変分布荷重を集中荷重に変換する。

等変分布荷重においては、直角四辺形および三角形が基本図形となるため、それらに変換された集中荷重の大きさおよび位置を覚えてほしい。実際には、図 3.2(b) の台形等変分布荷重は図 3.3(b) に示すように、上の三角形および下の直角四辺形に変換し、二つの集中荷重に変換したほうが計算は簡単になる。この場合に

$$\begin{aligned} \text{三角形:} & \quad P_1 = \frac{kb^2}{2}; \quad L_1 = a + \frac{2}{3}b \\ \text{直角四辺形:} & \quad P_2 = w_a b; \quad L_2 = a + \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

そして、台形等変分布荷重の総和は

$$P = P_1 + P_2 = w_a b + \frac{kb^2}{2} \quad (3.13)$$

である。これは、例 3.3 の計算結果と一致していることも確認できる。

作用点の計算結果がややこしいので、ここでその計算方法のみを説明する。 P_1 と P_2 による固定端まわりのモーメントの総和と、合力 $P = (P_1 + P_2)$ によるモーメント固定端まわりのが同じなるため、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)L &= P_1 L_1 + P_2 L_2 \\ \implies L &= \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2}{P_1 + P_2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

P_1 と P_2 の値をそれぞれ代入すると、合力 P の作用点（固定端までの距離 L ）を求めることができる。

3.2 建物のモデル化

実際の建物には、たくさんの部材があり、内外装材もありますので、計算技術がいくら進んでいても、構造物を丸ごとモデル化することは難しい。したがって、一定の精度を保証しながら、簡単に計算できるように、建物を工学的に近似モデルを構築する必要がある。

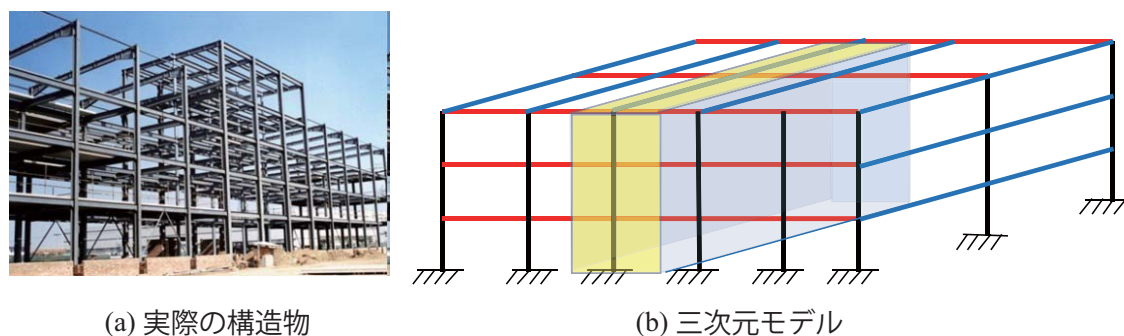


図 3.5 ラーメン構造の三次元モデル化

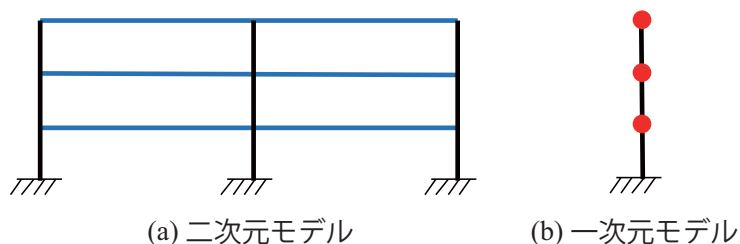


図 3.6 構造物の二次元・一次元モデル化

例えば、図3.5(a)にあるビル型建物は鉛直方向の線材である柱、水平方向の線材である梁および水平方向の面材である床で構成される。鉛直方向の面材である壁は外力を負担しない場合に、計算上無視されるが、外力を負担する耐震壁などが計算上無視できないケースもある。

外力を負担しない部材をすべて無視すれば、図3.5(a)の実建物に対しては、図3.5(b)のような三次元モデルとして構造計算を行うことができる。さらに、床の平面内剛性が高く（変形しにくく）、対称な建物の場合にねじれ変形が少ないため、三次元の構造物はそれぞれ梁間方向、桁行き方向¹に図3.6(a)に示すように二次元の代表的スパンを用いて近似することができる。動的構造計算においては、各階の質量を一つの質点に集中して、図3.6(b)のような一次元の3質点系に置換されることもある²。

図3.7には、橋梁などによく使われるトラス構造のモデル化、図3.8には、アーチ構造のモデル化を示している。

しかし、膜構造やドームなどの構造物のように、外力に対して三次元的に働いているため、二次元的に近似することができない場合もある。

¹ 桁行（けたゆき）は、一般的には建物の長手（ながて）方向、梁間（はりま）は、建物の短手（みじかて）方向をいう。

² 特に、コンピュータによる構造計算がそれほど進んでいなかった時代に、1次元の質点系モデルで動的解析を行っていた。今でもよく使われている。

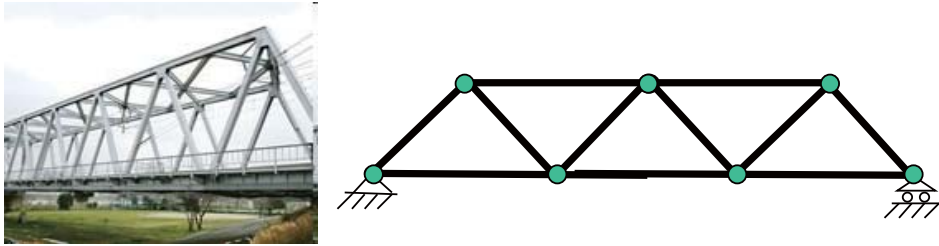


図 3.7 トラス構造のモデル化

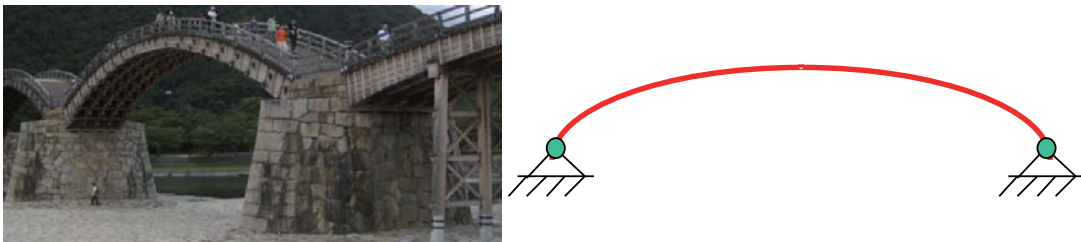


図 3.8 アーチ構造のモデル化

3.2.1 部材と接合部

構造物の構造要素（外力を負担する部分、部材とも呼ぶ）は、基本的には線적要素、または面的要素に分けられる。線적要素には、さらに図3.5(b)と図3.7に示すような直線状な要素、および図3.8に示すような曲線状な要素がある。構造力学には、曲線状な構造要素のあるアーチ構造についてもその構造特性を軽く説明する以外、基本的には直線状な部材で構築される建物に限定する。

また、膜構造やシェル構造などの構造物の構造要素は、面的であるため、線的に近似できない場合もある。

線적部材を有する構造物の場合に、異なる部材を繋ぐ部分は接合部 (Joint) と呼ばれる。接合部は、部材間に自由に回転できるかによっては、剛接合 (Rigid Joint) とピン接合 (Pin Joint) に分けられる。

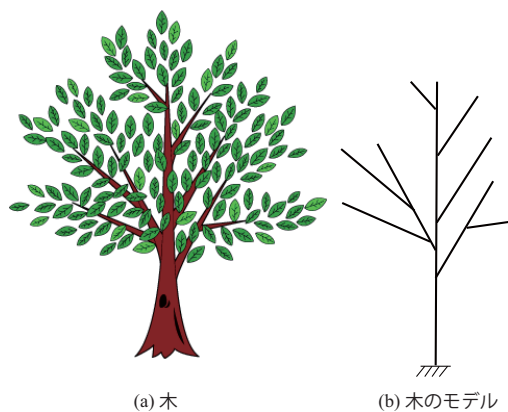


図 3.9 木とそのモデル化：木の分岐は自由に回転できないため剛接合となる。

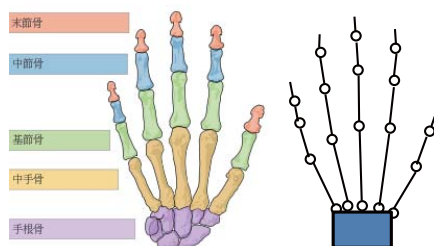


図 3.10 指の骨とそのモデル化：関節は自由に回転できるため、ピン接合となる。

- 剛接合の場合に、建物は外力の作用により変形するが、異なる部材間の角度が変形前後も変わらない。部材間の回転を拘束し、その角度を維持するように、(曲げ)モーメントが働いている。
- ピン接合の場合に、異なる部材間の角度(回転)は自由に変えられる。部材間の回転が拘束されず、その角度を維持できないため、ピン接合部における曲げモーメントがゼロである。ピン接合は円(o)で表す。

植物には、剛接合部が多くみられる。例えば、図3.9に示すように、木の分岐などがある。

また、動物の関節はほとんどピン接合部である。例えば、図3.10に示すように、指の節、または骨の間などがある。

直線状な部材を有する構造物には、その接合部はピンであるか剛であるかによってはそれぞれトラス(Truss)構造とラーメン³(Frame)構造に分類ができる。この二種類の構造物は構造力学の主な対象となる。

- トラス構造(図3.7)のすべての部材はピン接合部でつながっている。したがって、第4章に詳しく説明するが、外力を受けたとき、トラス構造の部材には軸力しか存在しない。
- ラーメン構造(図3.5)の部材が剛接合部でつながっている。第5章以降に詳しく説明するが、外力を受けたとき、梁およびラーメン構造の部材には軸力、せん断力および曲げモーメントが生じる。

3.2.2 支点と反力

構造物を支えるところは支点(Support)または支持点と呼ばれる。構造物の形状は変わらないままの並進(Translation)または回転(Rotation)は剛体変位(Rigid-body Motion)と呼ばれる。図3.11では、二次元空間における三つの剛体変位を示している。それぞれは各方向の併進およびある点周りの回転である。建物の変形を無視し、剛体とみなすとき、支点の拘束(Constraint)によって剛体変位が生じないようにしないと建物としては成り立たない。ここで、拘束とは運動をさせないことである。

また、建物の運動を拘束するために、支点より建物に力は働いている。外力による建物の(加速)運動を防ぐ(拘束する)ため、基本的には外力と反対の方向に働いているため、この力は支点反力(Reaction Force)と呼ばれる。

構造力学には、固定支点、ピン支点およびローラー支点が最もよく使われている。その実物の写真は図3.12に示している。また、これらの支点のモデル化およびそれらに対応している反力は

³ 日本語の「ラーメン」は、ドイツ語のRahmenから由来し、英語のFrame(フレーム)、および漢字の骨組みとは同じ意味をもつ。ラーメン構造は、近代建築における最も一般的な構造形式であり、事務所ビルや中層集合住宅などには柱間を6-8mにしたもののがもっともコスト効率のよいものとされ、経済スパンとも呼ばれている。

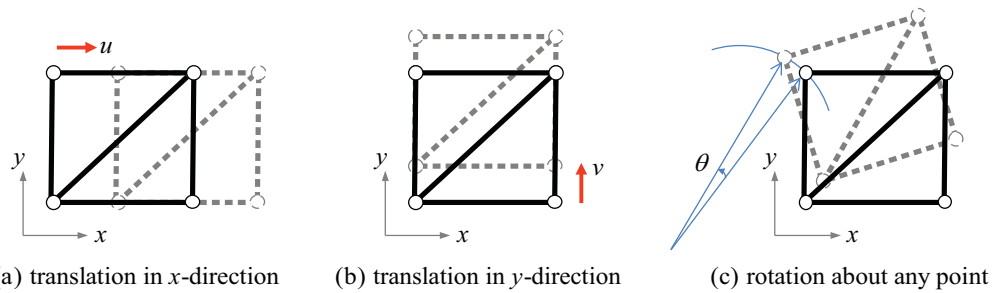


図 3.11 二次元における剛体変位 (併進・回転)

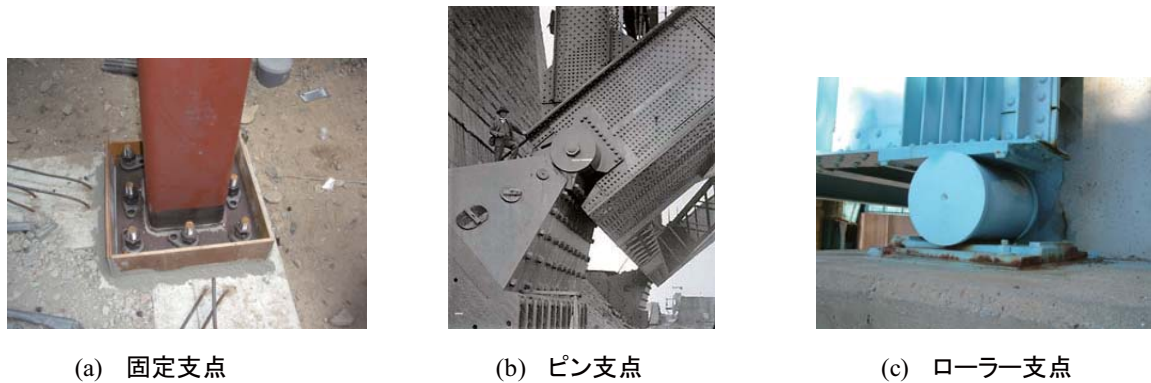


図 3.12 実際の支点：固定、ピン、ローラー。

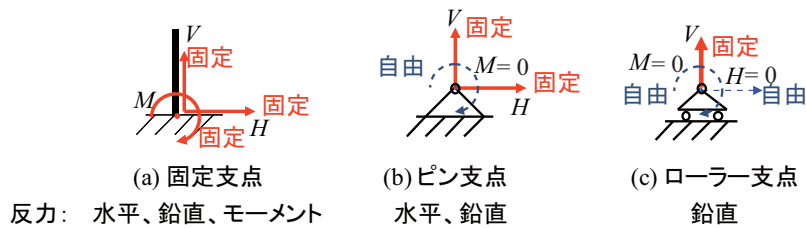


図 3.13 支点のモデル化とその反力：固定、ピン、ローラー。

図3.13にまとめられる。 M 、 V と H は、それぞれ反力のモーメント (Moment)、鉛直 (Vertical) 方向の反力および水平 (Horizontal) 方向の反力を表す。

支点の種類：

- ローラー支点：(Roller Support) 一つの方法の併進が解放、一つの方法の並進が拘束されている。したがって、拘束された並進方向のみ反力があり、モーメントは生じない。または水平方向の反力 H とモーメント M がいつでもゼロとなる：図 3.13(c) において、 $H=0, M=0$ は常に成り立っている。鉛直方向の反力 V の大きさは外力に依存する。
- ピン支点：(Pinned Support) 並進を拘束するが、回転は拘束しない。したがって、並進方向に反力がある（2次元の場合には2個）が、モーメントは生じない（またはモーメントがゼロ： $M=0$ ）。
- 固定支点：(Fixed Support) 並進も回転も拘束される。したがって、並進方向に反力（2次元の場合には2個）とモーメントは存在する。

以上の定義によって、図3.9の木と地面の接合部は固定支点としてモデル化できる。図3.10の腕はピン支点としてモデル化できる。また、橋梁などの長い構造物は温度の変化で伸び縮みによる構造損傷を避けるため、一端がピン支点、一端がローラー支点という形式がよく使われる。

3.2.3 反力の求め方

支点反力を求めるには、前章で紹介した力およびモーメントの釣合い方程式は必要となる。手順は以下のようにまとめられる。

反力を求める手順：

1. 支点反力を描く。
2. それぞれ水平方向、鉛直方向およびモーメントの釣合い方程式を立てる。
3. 上記の釣合い方程式を解くことによって、未知数である反力を求める。
4. 最後に、反力の方向を明記する。

ここで注意してほしいのは、に次元の建物に対して三つの釣合い方程式しか立てられないため、基本的には四つ以上の反力がある場合には直接解くことができない。これは、(線形独立な)方程式の数と未知数の数によるものである。反力を一意に解ける建物は、(外的)静定構造と呼ばれ、そうでない建物は(外的)不静定構造である。以下は(外的)静定構造の反力を求めるいくつかの例を説明する。

反力の計算では、反力の正方向は仮定であるため、計算結果にその方向を明記する必要がある。

3.2.3.1 片持ち梁の反力



図 3.14 片持ち梁に相当する建物またはそのパーツ

この節には、図3.15(a)に示すような一端固定、一端自由の片持ち梁(Cantilever)を例として、反力の求め方について説明する。片持ち梁は図3.14に示すように階段やバルコニーなどに多用されている。また、超高層ビルやタワーなども実は地面に固定された片持ち梁として考えても良い。

例 3.5. 図3.15(a)に示すような片持ち梁の反力を求めてください。

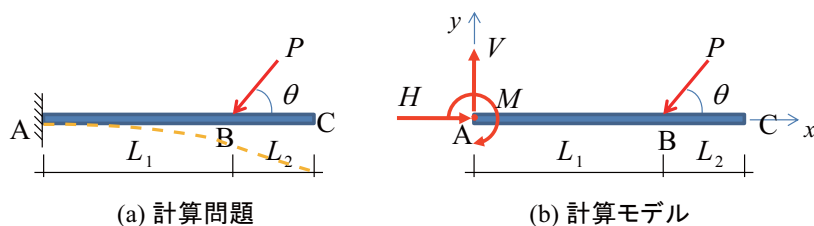


図 3.15 片持ち梁とその反力

片持ち梁の変形は図3.15(a)に点線で示している。計算手順に踏まえて、その左の固定端に生じる反力 (H, V, M) は以下のように求められる。

1. 左端の固定支点 A においては、片持ち梁の両方向（水平・鉛直）の並進および回転が拘束されているため、それぞれ水平反力 H 、鉛直反力 V およびモーメント M が生じる。したがって、図3.15(a)の計算問題を図3.15(b)の計算モデルに書き直す。ここで、水平 (x -) 方向と鉛直 (y -) 方向の正方向も表示している。また、各反力の正方向も図の中に定義している。 $(H$ は左向き、 V は上向き、 M は時計回りを正方向とする。 x と y の正方向と一致しなくても構わない。)
2. 水平 (x -) 方向、鉛直 (y -) 方向および任意点（ここで、A 点とする）回りのモーメントの釣り合い方程式は下記のように書ける。

$$\begin{aligned}\sum X &= H + (-P \cos \theta) = 0 \\ \sum Y &= V + (-P \sin \theta) = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= M + (P \sin \theta)L_1 = 0\end{aligned}\quad (3.15)$$

3. 式 (3.15) には、釣り合い方程式の数が 3 であり、未知数の数も 3 (反力 H, V, M) であるため、未知数を一意に求めることができる：

$$\begin{aligned}H &= P \cos \theta \quad (\rightarrow) \\ V &= P \sin \theta \quad (\uparrow) \\ M &= -PL_1 \sin \theta \quad (\text{反時計まわり})\end{aligned}\quad (3.16)$$

4. 反力の方が式 (3.16) にすでに反映している。 H, V の結果が正であるため、仮定した正方向のままである。従って、 H は左向き、 V は上向きとなる。 M の結果が負であるため、仮定した正方向（時計回り）と反対方向となり、反時計回りとして描く。

3.2.3.2 単純梁の反力

この節には、図3.16(a)に示すような単純梁を例として、反力の求め方について説明する。一端ピン支点、一端ローラー支点をもつ梁は単純梁と呼ばれている。特に、橋梁などの土木構造物に多用されている。

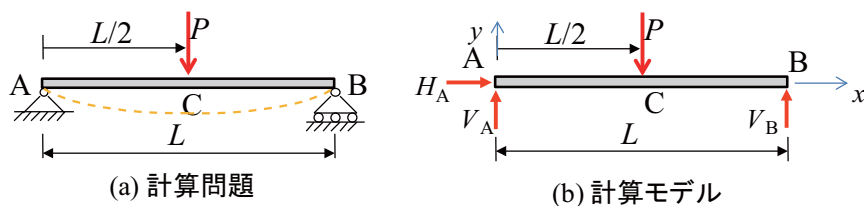


図 3.16 単純梁とその反力

例 3.6. 図3.16(a) に示すような単純梁の反力を求めてください。

単純梁の変形は図3.16(a) に点線で示している。計算手順に踏まえて、両端部に生じる反力 (H_A, V_A, V_B) は以下のように求められる。

1. 左端のピン支点 A においては、単純梁の両方向（水平・鉛直）の並進が拘束されているため、それぞれ水平反力 H_A と鉛直反力 V_A が生じる。また、右端のローラー支点 B においては、単純梁の鉛直方向の並進が拘束されているため、鉛直反力 V_B が生じる。したがって、図3.16(a) の計算問題を図3.16(b) の計算モデルに書き直す。ここで、水平 (x -) 方向と鉛直 (y -) 方向の正方向も表示している。また、各反力の正方向も図の中に定義している。時計まわりをモーメントの正方向とする。
2. 水平 (x -) 方向、鉛直 (y -) 方向および任意点（ここで、A 点とする）回りのモーメントの釣合い方程式は下記のように書ける。

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A = 0 \\ \sum Y &= V_A + V_B - P = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= H_A \cdot 0 + V_A \cdot 0 - V_B L + P \frac{L}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

3. 式 (3.17) には、釣合い方程式の数が 3 であり、未知数の数も 3 (反力 H_A, V_A, V_B) であるため、未知数を一意に求めることができる：

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A &= P/2 \quad (\uparrow) \\ V_B &= P/2 \quad (\uparrow) \end{aligned} \quad (3.18)$$

4. 反力の方向が式 (3.18) にすでに反映している。 V_A, V_B の結果が正であるため、仮定した正方向（上向き）のままである。

3.2.3.3 静定ラーメン構造の反力

ラーメン構造は、長方形に組まれた骨組み（部材）の各接合箇所を剛接合したものである。図 3.17(a) は 3 階建てのラーメン構造の実例を示している。その反力の計算も、片持ち梁の場合と同じような手順で力およびモーメントの釣合いによって求めることができる。



(a) ラーメン構造



(b) 3ヒンジラーメン構造

図 3.17 実際のラーメン構造 (a) と 3 ヒンジラーメン構造 (b)

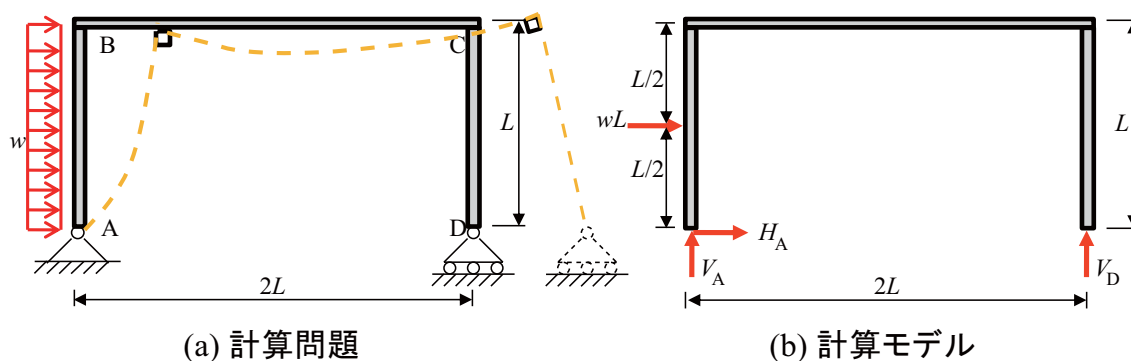


図 3.18 静定ラーメン構造の反力

例 3.7. 図3.18の(外的) 静定ラーメン構造の反力を求めてください。

静定ラーメン構造の変形は図 3.18(a) に点線で示している。部材 AB と部材 BC 間の接合部 B および接合部 C は剛性であるため、変形後も部材間の角度 (90°) が保たれる。

1. とりあえず、図 3.18(a) の計算問題を (b) の計算モデルに変換する：

- 支点の拘束を解除し、反力 V_A, H_A, V_D を描く。
(左側はピン支点 A で、鉛直・水平方向にも動けないため、鉛直・水平方向の反力 V_A, H_A がかかっている；右側はローラー支点 D で、鉛直方向に動けないため、鉛直方向の反力 V_D のみかかっている。)
- 分布荷重を集中荷重に置換する。集中荷重の大きさは分布荷重の面積 wL であり、方向は分布荷重の方向と同じく右向き、作用点は分布荷重の図心の中央点にある。

2. 力およびモーメントの釣合い方程式を立てると、以下の三つの方程式がある。

$$\begin{aligned}\sum X &= H_A + (wL) = 0 \\ \sum Y &= V_A + V_D = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= (wL) \frac{L}{2} - V_D 2L = 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

3. 三つの未知数 V_A, H_A, V_D に対して、三つの方程式があるため、未知数を一意に解ける：

$$\begin{aligned}\underline{H_A} &= -wL \quad (\leftarrow) \\ \underline{V_D} &= \frac{wL}{4} \quad (\uparrow) \\ \underline{V_A} &= -V_D = -\frac{wL}{4} \quad (\downarrow)\end{aligned}\quad (3.20)$$

3.2.3.4 3 ヒンジラーメン構造の反力

連立方程式を解くには、ポイントは未知数の数に合わせて同じ数の方程式が必要である。建物全体に対して、その力・モーメントの釣合い方程式は二次元の場合には三つがある。したがって、反力の数が 4 以上の場合には、そのまま解けないため、別の(釣合い)方程式⁴が必要となる。たとえば、図3.19に示すような三つのヒンジ(ピン)を有するラーメン構造(ピン支点・

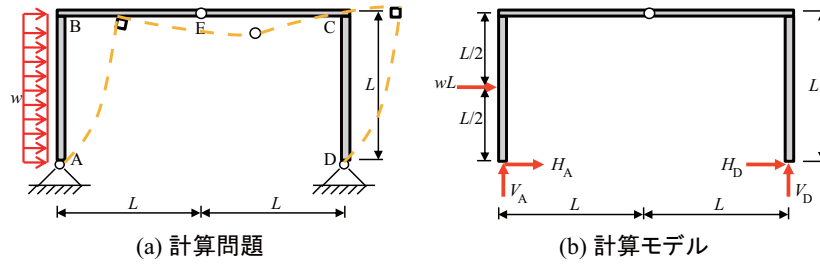


図 3.19 3 ヒンジラーメン構造の反力：ピン接合の曲げモーメントがゼロを利用して、四つの反力を求める。

接合部は三つある）に対して、その反力を求めてみる。その実物については図3.17(b)を参照ください。

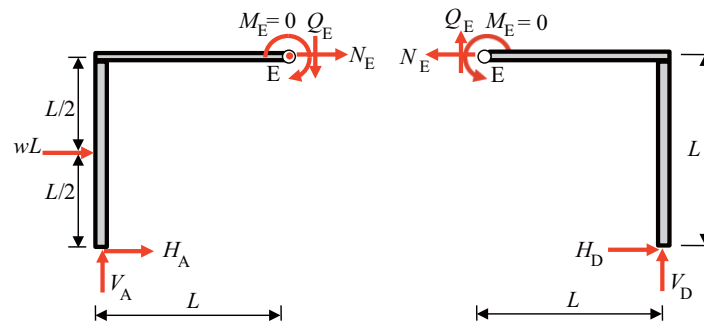


図 3.20 3 ヒンジラーメン構造：節点 E を仮想的に切断し、右半分を計算モデルとする。

例 3.8. 図3.19に示すような 3 ヒンジラーメン構造の反力を求めてください。

3 ヒンジラーメン構造図の変形は3.19に点線で示している。ここで、部材 BE と部材 EC は共通の E 点においてその変位が連続しているが、その勾配（接線方向）は不連続であることに注意されたい。

図3.19にのラーメン構造は、二つのピン支点および一つのピン接合部、合わせて三つのピン（ヒンジ）がある。左側も右側もピン支点のため、それぞれ二つ（鉛直・水平）の反力があり、全部で四つの未知な反力（ V_A, H_A, V_D, H_D ）がある。

しかし、構造物全体を対象とした釣合い方程式は二次元の場合に以下のような三つしかない。

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A + H_D + (wL) = 0 \\ \sum Y &= V_A + V_D = 0 \\ \sum M_{A \text{ 点まわり}} &= (wL)\frac{L}{2} - V_D 2L = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

これを用いて、 V_A, V_D は以下のように解けるが

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{wL}{4} \quad (\uparrow) \\ V_A &= -V_D = -\frac{wL}{4} \quad (\downarrow) \end{aligned} \quad (3.22)$$

⁴ 未知数の数に対して、釣合い方程式の数が足りない構造は、不静定構造である。それを解くために、変位の適応条件が必要となる。

H_A, H_D を求めるために、もう一つの釣合い方程式が必要となる。そのために、ピン接合部の特性を利用する。

節点 E はピン接合部であり、部材 BE、CE 間の相対的回転を拘束していないため、その曲げモーメントがゼロである。そして、節点 E のところを仮想的に切断すると、図3.20のように描く：

- 仮想的に切断されたところに、切断される前の两部分の相対的關係も維持するために、三つの断面力がある（詳細については、後で説明する）。
- それぞれは部材と平行の軸力 N_E 、部材と直交のせん断力 Q_E および回転の曲げモーメント M_E 。左と右の断面力は作用点（E 点）と大きさは一緒、方向は反対となっている。

前述したように、節点 E はピン接合であり、モーメントが生じないため、 $M_E = 0$ は既知となる。しかし、残りの二つの断面力 Q_E, N_E は未知数である。 $M_E = 0$ を利用すれば、もう一つの方程式を書き、式 (3.21) の三つの方程式を合わせ、四つの反力を求めることが可能となる。

図3.20の計算モデルにもいろいろな力がかかるが、釣合い状態にある。釣合い方程式を書く場合に、左の半分モデルでも、右半分モデルでもよいが、右半分モデルを考える場合に外力荷重 wL はないため、計算上が楽となる。さらに、 Q_E, N_E は未知数であるので、できるだけ釣合い方程式の中で消してほしい。そして、右半分モデルで、E 点まわりのモーメント釣合い方程式を書くと

$$\begin{aligned}\sum M_{E \text{ 点まわり}} &= -M_E - V_D L - H_D L \\ &= -V_D L - H_D L \\ &= 0\end{aligned}\quad (3.23)$$

となり、整理すると

$$\underline{H_D} = -V_D = -\frac{wL}{4} \quad (\leftarrow) \quad (3.24)$$

が分かる。これを、式 (3.21) の一番目の式に代入して整理すると

$$\underline{H_A} = -wL - H_D = -\frac{3wL}{4} \quad (\leftarrow) \quad (3.25)$$

というふうに解ける。

3.3 断面力（軸力、曲げモーメント、せん断力）

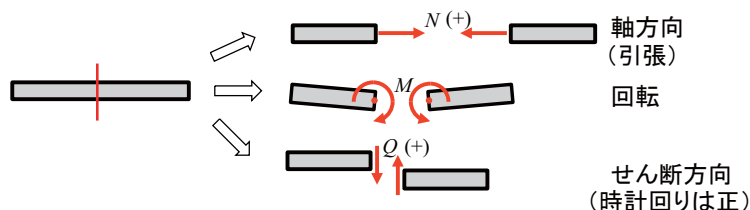


図 3.21 断面力：軸力、曲げモーメント、せん断力

前節の 3 ヒンジラーメン構造の反力を求める際にでてきたように、構造物のある部材を仮想的に切断すれば、一本の部材が（仮想的に）二本のものに分けられる。しかし、もともと共通の切断面において、両側の相対変位がゼロであるため、その相対変位が拘束されていることとなる。この拘束効果をもたらすには、断面力が働いている。ちなみに、断面力は、切断面に働いているすべての力（応力⁵）の総和を表し、断面の具体的な形状には関係ない。

⁵ 応力 (Stress) は、単位面積あたりの力として定義される。

建物の場合に、基本的には図3.21に示すような軸力 (Axial Force)、曲げモーメント (Bending Moment) およびせん断力 (Shear Force) がメインとなっている。(それ以外、ねじれなどがある。)

建物の部材に生じる主な断面力：

- 軸力： (仮想的に) 切断された部材の二つの部分の切断面は、軸方向に沿って離れないように働く力。
ここで、引張力 (切断面を離れる方向の力) を正とし、圧縮力 (切断面に向いている方向の力) を負と定義される。
- 曲げモーメント： (仮想的に) 切断された部材の二つの部分は、切断面まわり相対的に回転しないように働くモーメント。
曲げモーメントに正方向が定められていないが、図示の場合に、引張となる側に描く。
- せん断力： (仮想的に) 切断された部材の二つの部分は、部材の軸方向と直交する方向に沿って離れないように働く力。
対象とした部分を時計回しさせるほうを正方向とし、反時計回りさせるほうを負方向とする。

ここで注意してほしいのは、反力には正負方向が定義されていないが、断面力には曲げモーメント以外は正負方向が定義されている。また、曲げモーメントを図示する場合に、引張側に描く必要がある。これは、構造設計 (特に鉄筋コンクリートの設計) に非常に重要⁶である。

また、ピン接合を仮想的に切断した場合に、両側の相対的回転が自由なので、曲げモーメントが生じない、またはゼロである。この条件は、前節の3ヒンジラーメンの反力計算にも利用された。

3.4 宿題

Exercise 3.1. 図3.22にある片持ち梁の変形図を描いて、その反力を求めてください。

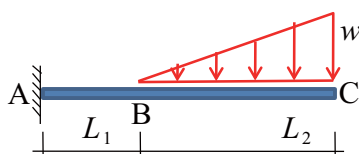


図 3.22 片持ち梁の反力計算 (宿題3.1)

Exercise 3.2. 図3.23にある単純梁の変形図を描いて、その反力を求めてください。

Exercise 3.3. 図3.24にある3ヒンジラーメン構造の変形図を描いて、その反力を求めてください。

⁶ コンクリートの引張強度は、圧縮強度の十分の一ぐらいしかないため、引張側の力はその鉄筋によって負担される。

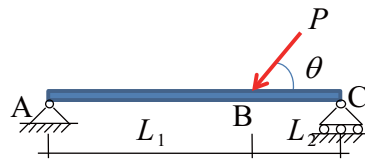


図 3.23 単純梁の反力計算 (宿題3.2)

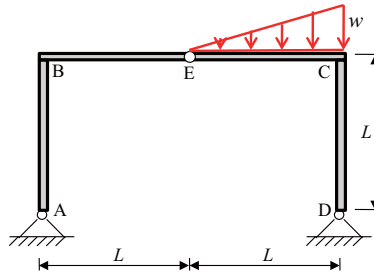


図 3.24 3 ヒンジラーメン構造の反力計算 (宿題3.3)