

## Chapter 10 構造物の非線形挙動

**Abstract** この章には、座屈および塑性という非線形挙動について勉強する。

### 10.1 座屈

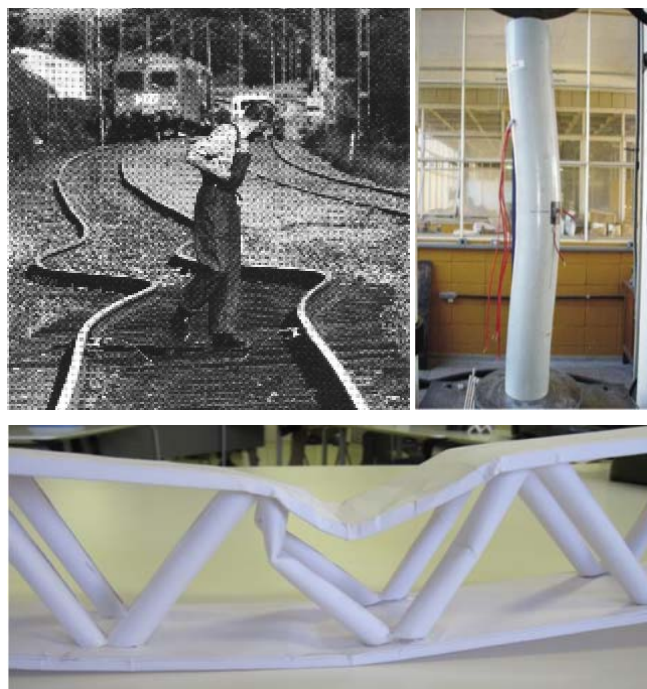


図 10.1 座屈の例。上左：高温により伸びた鉄道レール、上右：柱の圧縮実験、下：トラス紙模型の荷重実験。

柱などの部材が圧縮軸力をうける際に、一般的には軸方向に縮める変形が進む。しかし、細長い柱や薄い板の場合に、材料破壊応力に達するまで顕著な変形が見られないが、軸方向と直交する方向に急に大きな変形が生じる座屈（ざくつ、Buckling）（例えば図10.1）が発生する可能性がある。座屈現象は構造の不安定現象のひとつである。

構造の座屈現象を引き起こす荷重をその構造の座屈荷重という。座屈荷重はその構造の剛性および形状に依存し、材料の強度以下で起こることもある。圧縮荷重を受ける柱の場合、材料、断面形状、荷重の条件が同じであっても、座屈荷重は柱の長さに依存するため、短い柱では座屈を起こさず、長い柱に発生しやすい。

## 10.1.1 オイラー座屈

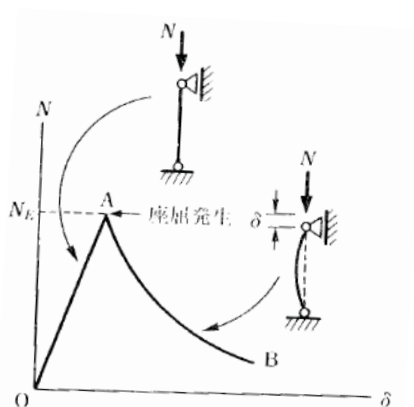


図 10.2 軸圧縮を受ける柱の軸力と変位関係。

まっすぐの棒（柱）の図心軸に圧縮力  $N$  を加える問題を考える。柱の両側はピン支持とローラー支持である。座屈までの軸力  $N$  と軸方向の変位  $\delta$  の関係を図10.2の直線の部分に示す。この場合に軸力・変位関係は以下の式で表せる。

$$\delta = L \cdot \varepsilon = L \cdot \frac{\sigma}{E} = \frac{L}{EA} N \quad (10.1)$$

ここで、 $E$  はヤング係数、 $A$  は断面積である。従って、直線部分の傾きは  $L/(EA)$  となる。「完璧」にまっすぐな柱（完全系、perfect system）なら、上記の式にしたがって、材料破壊（または次節に出てくる降伏）まで変形していくが、実際の柱は少しだけの施工誤差（不整、imperfection）があっても座屈現象が起こる可能性がある。

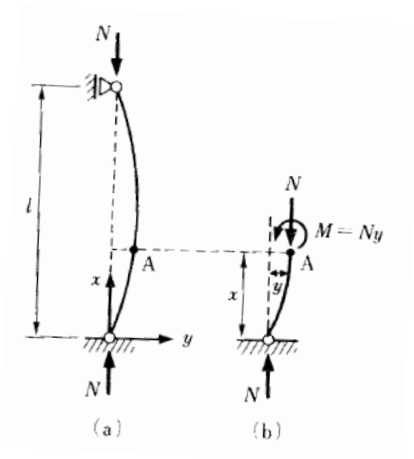


図 10.3 オイラー座屈荷重。

スイスの数学者オイラー (Leonard Euler) は、その座屈荷重  $N_E$  を誘導した。図10.3(a)の柱に適当なところを切断し、図10.3(b)に示すように取り出して、切断面 A 点まわりのモーメント釣合い方程式を立つと、以下の式となる。

$$\sum M_{A \text{ 点まわり}} = M - N \cdot y = 0 \quad (10.2)$$

また、弾性曲線式  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$  より、上式を下のたわみ  $y$  に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N}{EI}y = 0 \quad (10.3)$$

ここで、 $I$  は断面 2 次モーメントである。

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (10.4)$$

で表したとき、微分方程式は以下のように整理できる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2y = 0 \quad (10.5)$$

この微分方程式の一般解は、次式で表される。

$$y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x \quad (10.6)$$

積分定数  $C_1, C_2$  は境界条件から定まる。

$$\begin{aligned} y_{x=0} = 0 &\implies C_2 = 0 \\ y_{x=l} = 0 &\implies C_1 \sin \omega l = 0 \implies C_1 = 0 \text{ または } \omega l = m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (10.7)$$

$C_2 = 0$  は決まっているため、 $C_1 = 0$  が成立する時、たわみはいつもゼロとなり、完璧系を意味する。一方、 $\omega l = m\pi$  の時は、 $y = C_1 \sin(m\pi/l)$  となり、柱はサイン曲線の曲がった状態にあることを表している。この時の圧縮力  $N$  は以下ようになる。

$$N = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10.8)$$

圧縮荷重はゼロから少しずつ増えていくため、最初に訪れる解は  $m = 1$  のときの荷重  $N_E$  はオイラー荷重と呼ばれる。

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (10.9)$$

座屈応力度  $\sigma_E$  は座屈荷重  $N_E$  と柱の断面積  $A$  を用いて定義される。

$$\sigma_E = \frac{N_E}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2} = \frac{\pi^2 E}{l^2/i^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (10.10)$$

ここで、 $i (= \sqrt{I/A})$  は断面 2 次半径、 $\lambda (= l/i)$  は細長比 (slenderness ratio) である。 $\lambda$  は無次元で、 $i$  は長さの次元をもっている。式からでも分かるように、柱は細長いほど、座屈荷重が小さいため、座屈しやすくなる。三年生前期の建築構造計画法 (鉄骨構造) には、また実務設計においてどのぐらいの細長比が許されるかなどについて詳しく解説する。

また、座屈荷重は支持条件の影響を受ける。

有効長さ  $l_k$  を用いて、オイラー座屈荷重は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} N_E &= \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}, \\ \sigma_E &= \frac{\pi^2 E}{\lambda_k^2} \end{aligned} \quad (10.11)$$

柱の支持条件によって、その有効長さは図10.4にまとめている。

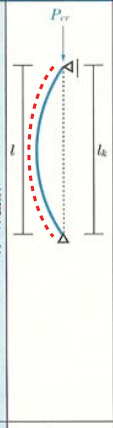
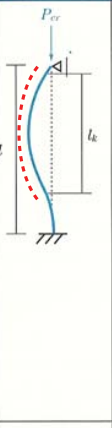
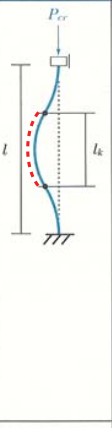
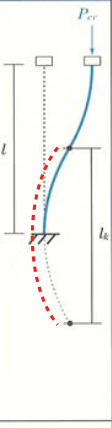
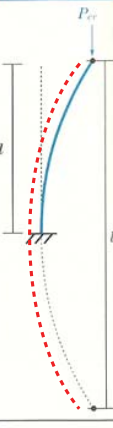
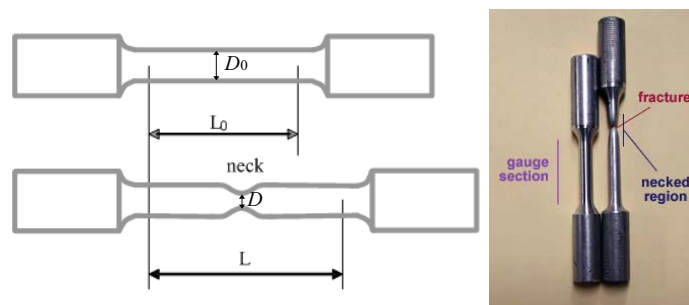
拘束条件	水平移動拘束 回転両端ピン	水平移動拘束 回転上端ピン下端固定	水平移動拘束 回転両端固定	水平移動自由 回転両端固定	水平移動自由 回転上端ピン下端固定
座屈モード					
有効座屈長さ $l_k$	$l$	$0.7l$	$0.5l$	$l$	$2l$

図 10.4 支持条件による有効長さ。

## 10.2 塑性

### 10.2.1 鋼材の応力-ひずみ関係

図 10.5 鋼材の引張試験片 (Taken from <http://www.substech.com/>)

鋼材の力学的特性を調べるには、引張試験が簡便であるため、一般的に行われている。断面積  $A_0$ 、評点距離  $L_0$ 、直径  $D_0$  の試験片を万能試験機に挟み、引張荷重  $P$  を加えると、断面積  $A$ 、評点距離  $L$ 、直径  $D$  に変化したとする。このとき、荷重と評点間の伸びにより、応力  $\sigma$  (stress) とひずみ  $\varepsilon$  (strain) はそれぞれ

$$\sigma = \frac{P}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (10.12)$$

で定義する。

軟鋼の引張試験片を伸びさせると、(公称) 応力とひずみの関係は図 10.6 に示すように得られる。

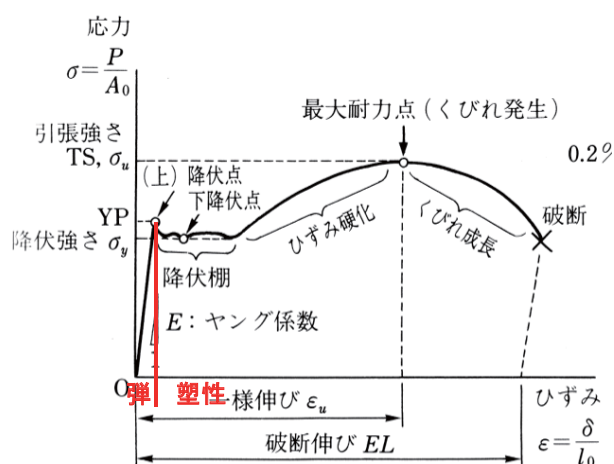


図 10.6 軟鋼の応力-ひずみ関係

- 応力  $\sigma$ （またはひずみ  $\varepsilon$ ）が小さいとき、 $\sigma$  と  $\varepsilon$  は完全な直線関係を保つ。荷重をゼロに戻すと、試験片も元の状態に戻り、残留変形（ひずみ）が生じない。この状態を保つ範囲は弾性範囲という。
- ある弾性限界を超えると、荷重がゼロにしても、試験片の変形がある程度戻るが、残留変形（ひずみ）が生じ、元の状態に戻れない。この弾性限界は、降伏強度  $\sigma_y$ （降伏強さ、Yielding Strength）といい、弾性範囲を超えたものは、塑性範囲という。また、軟鋼の場合に、降伏した後試験片が伸び続けるが、荷重がほぼ変わらない段階がある。これは、降伏棚という。
- さらに伸び続けさせると、試験片が均一に変形しなくなり、局部的にくびれ (Necking) が生じ、荷重が下がって破断する。この途中で達した最大の応力  $\sigma_u$  は、引張強度（引張強さ、Ultimate Strength）という。

弾性範囲における応力・ひずみ関係の勾配は、弾性係数  $E$ （ヤング係数、Young's modulus）と呼ぶ。鋼材の場合、どの鋼種でもほぼ  $E = 2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  である。

降伏強度  $\sigma_y$  と引張強度  $\sigma_u$  の比を降伏比  $Y$  と呼び、

$$Y = \frac{\sigma_y}{\sigma_u} \quad (10.13)$$

鋼材が降伏してから破断するまでの強度の余力を示す数値である。さらに、建物が降伏してから最大耐力に達するまでの塑性変形能力を決めるパラメーターでもあり、建物の構造上の粘り強さを確保するという点で耐震設計上重要な指標である。また、高張力鋼は強度を上げる目的で作られたものであるが、降伏強度の上昇した割合では引張強度は上昇していない。したがって、強度が大きい鋼材ほど降伏比  $Y$  が 1.0 に近づく傾向を示す。

### 10.3 構造設計（一次設計）

第 6 章ですでに説明したように、一次設計<sup>1</sup>では中小規模の地震に対して、構造物に損傷が生じないことを設計指標とする。鋼材には、塑性化が発生すると残留変形（残留ひずみ）が生じるため、構造物の損傷とみなす。したがって、一次設計の場合、最大の応力度は降伏強さを越えないのは原則である。一方で、構造物が受ける外力荷重としては様々であり、その特性もいろいろ異なっている。

基本的にはいつでもかかっているか（長期荷重）、たまにあるか（短期荷重）に対して、安全率を通じて異なる許容応力度を採用している。

<sup>1</sup> 二次設計の場合には、大規模地震に対して損傷があっても倒壊しないことを設計指標とする。

しかし、以上の議論は座屈しないことは前提条件となる。したがって、以下の条件式がある。

圧縮による最大垂直応力度  $\sigma_c$  は座屈応力度  $\sigma_E$  より小さいでなければならない：

$$\sigma_c \leq \sigma_E \quad (10.14)$$

### 10.3.1 基準強度 $F$ と引張強度 $F_u$

建築基準法における許容応力度設計においては、一次設計で損傷限界に対して許容応力度設計を行い、二次設計で安全限界に対して保有耐力の計算を行って構造安全性を確認することとなっている。

一次設計の許容応力度設計では、弾性解析によって得られた部材断面力を公称応力度  $\sigma_i$  ( $i$  は、引張、圧縮、曲げ、せん断などの応力度の種類) に換算し、この応力度の種類に対応した許容応力度  $f_i$  以下であることを確認する。すなわち、

$$\sigma_i \leq f_i \implies \text{OK} \quad (10.15)$$

許容応力度  $\sigma_i$  は、応力度の種類  $i$  によって部材等が損傷限界となる応力度  $\sigma_{cr,i}$  に対して、安全率  $c_i$  を考慮したものである。

$$f_i = \frac{\sigma_{cr,i}}{c_i} \quad (10.16)$$

ここで、損傷限界に対する  $\sigma_{cr,i}$  および  $c_i$  は、弾性範囲だけでなく、非弾性挙動も考慮して決められている。そこで、材料の基準強度  $F$  の値は降伏強度  $\sigma_y$  だけでなく、引張強度  $\sigma_u$  も考慮する必要がある。具体的には、JIS 規格で規定された降伏強度  $\sigma_y$  の下限値と引張強度の下限値の 70% のうちの小さい値を  $F$  として採用している。

上記の基準強度  $F$  と終局強度  $F_u$  は、表 10.1 に挙げられる。

表 10.1 建築構造用鋼材の  $F$  および  $F_u$  値 (N/mm<sup>2</sup>)

鋼材の種類		SN400	SN490
$F$	厚さ 40mm 以下	235	325
	厚さ 40 をこえ 100mm 以下	215	295
$F_u$		400	490

### 10.3.2 許容応力度

建築基準法施行令 90 条に定められている鋼材の許容応力度を、表 10.2 に示す。短期応力に対する許容応力度は長期応力の 1.5 倍であり、せん断の許容応力度は圧縮、引張、曲げの  $1/\sqrt{3}$  である。鋼種ごとの  $F$  値は、表 10.1 の値を用いる。

表 10.2 鋼材の短期・長期許容応力度 (N/mm<sup>2</sup>)

長期荷重に対する許容応力度			短期荷重に対する許容応力度				
圧縮	引張	曲げ	せん断	圧縮	引張	曲げ	せん断
	$\frac{F}{1.5}$		$\frac{F}{1.5\sqrt{3}}$		$F$		$\frac{F}{\sqrt{3}}$